MPSI 3 - Fermat Le 16.03.19
2018-2019

Devoir surveillé n°7

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème 1 - Formules d'inversion sur treillis

Les parties ne sont pas indépendantes les unes des autres.

A. Matrices triangulaires supérieures à diagonale unité

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note

$$T_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall\, i \in \mathbb{N}_n, {}^i[M]_i = 1 \text{ et } \forall\, i > j, {}^i[M]_j = 0\}$$

1. Pour cette question, on fixe $n = 4$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que $A \in T_4(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
   (c) Calculer A^n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   Vérifier que la formule trouvée est également vraie pour $n = -1$.
2. On suppose n quelconque.
   Soit $A \in T_n(\mathbb{R})$. On note $A' = A - I_n$.
   (a) Montrer qu'il existe $m \leqslant n$ tel que $(A')^m = O$
   (b) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}, comme une somme de puissances de A'.
   (c) Montrer, alors, que $(T_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

B. Modélisation de treillis et inversion de Rota

On considère un ensemble L fini de cardinal n, ordonné par une relation $\preceq$, non nécessairement totale.
Pour $x \preceq y$ et $x \neq y$, on note $x \prec y$.
On admet qu'il est possible d'indexer les éléments x de L de manière à ce que :

$$\forall\, i, j \in \mathbb{N}_n, \qquad x_i \preceq x_j \Longrightarrow i \leqslant j$$

Attention ! Il s'agit bien d'une implication, et non d'une équivalence...
Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout couple $(x_i, x_j) \in L^2$ tel que $x_i \preceq x_j$, on appelle chaîne de longueur p joignant x_i à x_j, toute suite finie $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots x_{i_p})$ d'éléments de L distincts, tels que

$$x_i = x_{i_0} \prec x_{i_1} \prec x_{i_2} \prec \cdots \prec x_{i_p} = x_j$$

On note $c_p(x_i, x_j)$ le nombre de ces chaînes.
Enfin, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall\, (i,j) \in (\mathbb{N}_n)^2$, ${}^i[A]_j = c_1(x_i, x_j)$.

1. Par convention, on a $c_0(x_i, x_i) = 1$ et $c_0(x_i, x_j) = 0$, pour tout $x_i \neq x_j \in L$.
   Que valent $c_1(x_i, x_j)$ si $x_i \prec x_j$ et $c_p(x_i, x_i)$ pour $p > 0$?

2. Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et $x_i, x_j \in L$,

$$c_{p+1}(x_i, x_j) = \sum_{x_i \preceq x_k \prec x_j} c_p(x_i, x_k)$$

3. Etude de A.
   (a) Montrer que $I_n + A \in T_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}_n \qquad {}^i[A^p]_j = c_p(x_i, x_j)$$

4. Fonction de Möbius On note pour tout $(x_i, x_j) \in L^2$

$$\mu(x_i, x_j) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{p \geqslant 0} (-1)^p c_p(x_i, x_j) & \text{si } x_i \preceq x_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) On note $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall\ (i,j) \in (\mathbb{N}_n)^2$, ${}^i[M]_j = \mu_L(x_i, x_j)$.
   Exprimer M en fonction de A.

   (b) Montrer la formule d'inversion de Rota :

$$\forall\ j \in \mathbb{N}_n,\ g(x_j) = \sum_{x_i \preceq x_j} f(x_i) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\ j \in \mathbb{N}_n,\ f(x_j) = \sum_{x_i \preceq x_j} \mu(x_i, x_j) g(x_i)$$

   On pourra raisonner matriciellement en considérant les lignes G et F telles que $\forall\ j \in \mathbb{N}_n$, $[G]_j = g(x_j)$ et $[F]_j = f(x_j)$.

C. Application aux treillis de divisibilité

Dans cette partie, on applique les résultats trouvés dans la partie précédente.
On considère $L = \mathbb{N}_n$ (avec n grand !) et la relation d'ordre de divisibilié : $i \preceq j$ ssi $i | j$.
Comme précédemment, on associe à ce treillis, la matrice $A = ({}^i[c_1(i,j)]_j)_{i,j \in \mathbb{N}_n}$

1. Description pour $n = 9$.
   (a) Pour $n = 9$, écrire la matrice $I_n + A$.
   (b) Exprimer alors la matrice M, associée à la fonction μ.
2. Retour au cas général. Expression de μ.
   On note $M = (I_n + A)^{-1}$ et $\mu(i,j) =^i [M]_j = \displaystyle\sum_{p \geqslant 0} (-1)^p c_p(i,j)$.
   (a) En calculant $M \times (I_n + A)$, montrer que pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\displaystyle\sum_{d|j} \mu(i,d) = \delta_{i,j}$.
   (b) Montrer que si i ne divise pas j, $\mu(i,j) = 0$ et que $\mu(i,i) = 1$, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$.
   (c) (*) Montrer avec la relation en 2.(a) et par récurrence sur k que si $j = i \times (p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k})$, avec $p_1 \dots p_k$, k nombres premiers distincts , on a

$$\mu(i,j) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } \forall\ i \in \mathbb{N}_k,\ \alpha_i = 1 \\ 0 & \text{si } \exists\ i \in \mathbb{N}_k,\ |\ \alpha_i \neq 1 \end{cases}$$

3. Application à l'indicatrice d'Euler.
   On admet que l'indicatrice d'Euler $\varphi : n \mapsto$ le nombre de nombres premiers à n vérifie

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

   Montrer que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = n \sum_{h|n} \frac{\mu(1,h)}{h}$$

Problème 2 - Théorème du minimax

On considère un entier $n \in \mathbb{N}$. Pour ce problème, les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont notées en minuscule, les matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en majuscule.
On considère ensuite :

- $e \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\forall\, k \in \mathbb{N}_n, \quad {}^k[e] = 1$
- $(e_1, e_2, \dots e_n) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ tel que $\forall\, i \in \mathbb{N}_n, \forall\, k \in \mathbb{N}_n\ {}^k[e_i] = \delta_{k,i}$
- $\Delta = \{x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid e^T x = 1, \forall\, i \in \mathbb{N}_n, e_i^T x \geqslant 0\}$
- $\forall\, x, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad x \leqslant y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_n, \quad {}^k[x] \underset{\mathbb{R}}{\leqslant} {}^k[y]$

Cette dernière relation est une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_{n,1}$. On peut noter $y \geqslant x$ pour signifier $x \leqslant y$.
En fait, $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème, on note, pour une matrice de A donnée :

$$\text{maximin}(A) = \sup_{x\in\Delta}\left(\inf_{y\in\Delta} x^T \times A \times y\right) \qquad \text{minimax}(A) = \inf_{y\in\Delta}\left(\sup_{x\in\Delta} x^T \times A \times y\right)$$

A. Etude des ensembles données

1. Montrer que si $x \in \Delta$, alors $0 \leqslant x \leqslant e$ (où, ici, 0 est la matrice colonne nulle).
2. Δ est-il un sous-espace vectoriel de de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?
   Si oui, préciser sa dimension (*on n'attend pas de démonstration ici*).
3. Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, exprimer simplement $e_i^T \times A \times e_j$ en fonction des coefficients de A.
4. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\max_{i\in\mathbb{N}_n}\left(\min_{j\in\mathbb{N}_n} e_i^T \times A \times e_j\right) \leqslant \min_{j\in\mathbb{N}_n}\left(\max_{i\in\mathbb{N}_n} e_i^T \times A \times e_j\right)$$

B. Etude de deux matrices particulières

On considère $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note, pour l'étude de la matrice S, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Etude des puissances de S
   (a) Donner le polynôme, unitaire, de degré minimal qui annule J. (*On justifiera le résultat*)
   (b) Exprimer S en fonction de J et J^2.
   En déduire que $S^3 = -3S$.
   (c) La matrice S est-elle inversible. (*On justifiera le résultat*)
   (d) Exprimer alors, pour $k \geqslant 1$, S^k simplement, selon la valeur de k modulo 2.
2. maximin(S). On fixe $n = 3$. On considère $x \in \Delta$ fixé pour les questions (a) à (d).
   On peut supposer que $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (a) Comme $x \in \Delta$, on rappelle que $x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]$ (question A.1).
   En déduire que pour tout $i, j \in \mathbb{N}_3$, $x_i - x_j \in [-1, 1]$
   (b) Calculer, par ailleurs, $(x_3 - x_2) + (x_1 - x_3) + (x_2 - x_1)$.
   (c) Donner, pour tout $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \Delta$ l'expression de $x^T S y$
   (d) En déduire que :

$$\inf_{y\in\Delta} x^T \times S \times y = \min(x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1)$$

   (e) On relâche le caractère fixé de x.
   Montrer que maximin(S) $= 0$ et que maximin(S) est atteinte par le calcul $x^T \times S \times y$ en choisissant bien x.
   On donnera la valeur de x.

(f) Montrer que $\text{minimax}(S) = \text{maximin}(S)$.

3. $\text{maximin}(T)$. On s'intéresse maintenant à T et considère donc $n = 4$.

   (a) Soit $x \in \Delta$, fixé. Montrer que

$$\inf_{y \in \Delta} x^T \times T \times y = \min(-x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 - x_4, -x_1 + x_2 - x_3) := m(x)$$

   (b) En déduire que $\text{maximin}(T) = 0$ et que $\text{maximin}(T)$ est atteinte par le calcul $x^T \times T \times y$ en choisissant bien x, pour tout $y \in \Delta$ (*On donnera la valeur de* x).

   On admet que l'on a encore $\text{maximin}(T) = \text{minimax}(T) = 0$

C. Théorème de Van Neumann

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall\ i, j \in \mathbb{N}_n$, ${}^i[I]_j = 1$.

1. Quel est le rang de I ?
   Montrer que pour tout $x, y \in \Delta$, $x^T I y = 1$.
2. On note $A' = A + \Big(1 - \min_{i,j \in \mathbb{N}_n}({}^i[A]_j)\Big) I$.
   Montrer que pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}_n$, ${}^k[A']_\ell > 0$.
3. Soit $y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\sup_{x \in \Delta} x^T A' y = \max_{i \in \mathbb{N}_n}({}^i[A'y])$
   (b) Puis que, pour tout $M \in \mathbb{R}$: $\quad \sup_{x \in \Delta} x^T A' y \leqslant M \iff A'y \leqslant Me$
4. Etude de $\text{minimax}(A')$.
   (a) Montrer l'équivalence, pour tout $t > 0$:

$$\text{minimax}(A') \leqslant t \iff \exists\ y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } y \geqslant 0, y^T e = 1 \text{ et } A'y \leqslant te$$

   (b) Puis l'équivalence :

$$\text{minimax}(A') \leqslant t \iff \frac{1}{t} \leqslant \max_{y \geqslant 0, A'y \leqslant e}(e^T y)$$

   On admettra que $\sup\limits_{y \geqslant 0, A'y \leqslant e}(e^T y) = \max\limits_{y \geqslant 0, A'y \leqslant e}(e^T y)$.

   (c) En déduire que $\dfrac{1}{\text{minimax}(A')} = \max\limits_{y \geqslant 0, A'y \leqslant e}(e^T y)$.
5. De même, montrer que $\dfrac{1}{\text{maximin}(A')} = \min_{x \geqslant 0, (A')^T x \geqslant e}(e^T x)$
6. On admet le résultat de dualité : $\max\limits_{y \geqslant 0, A'y \leqslant e}(e^T y) = \min\limits_{x \geqslant 0, (A')^T x \geqslant e}(e^T x)$,
   en déduire le théorème de Van Neumann (1928) :

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \text{minimax}(A) = \text{maximin}(A)$$

Question bonus : Semaine des mathématiques : *Jouons ensemble aux mathématiques.*
Que pensez-vous de l'introduction du puits dans le jeu du chi-fu-mi (pierre/feuille/ciseau) ?