Devoir à la maison n°9
CORRECTION

Exercice

Pour répondre à cet exercice, nous allons exploiter le principe de décomposition : *une et une seule application est définie par la description proposée.*

— Définir les bijections f de $\mathbb{N}_{12}$ dans lui-même possédant la propriété : si n est pair, alors $f(n)$ est pair consiste exactement à définir :
  - définir l'image des 6 nombres paires, parmi les 6 nombres possibles. Il y a 6! possibilités.
  - puis définir les images des nombres impairs, parmi les nombres impaires nécessairement. Il y a de nouveau 6! possibilités.

  $\boxed{\text{Il y a } (6!)^2 = 518\,400 \text{ permutations de } \mathbb{N}_{12} \text{ telles que si } n \text{ est pair, alors } f(n) \text{ est pair.}}$

— Définir les bijections f de $\mathbb{N}_{12}$ dans lui-même possédant la propriété : si n est divisible par 3, alors $f(n)$ aussi, consiste exactement à définir :
  - définir l'image des 4 nombres divisibles par 3 ($\{3, 6, 9, 12\}$), parmi les 4 nombres possibles. Il y a 4! possibilités.
  - puis définir les images des autres nombres, parmi les nombres eux nécessairement. Il y a 8! possibilités.

  $\boxed{\text{Il y a } 4!8! = 967\,680 \text{ permutations de } \mathbb{N}_{12} \text{ telles que si } n \text{ est divisible par 3, alors } f(n) \text{ également.}}$

— Définir les bijections f de $\mathbb{N}_{12}$ dans lui-même possédant les deux propriétés consiste exactement à définir :
  — définir l'image des 2 nombres divisibles par 6 (par 2 et par 3) ($\{6, 12\}$), parmi les 2 nombres possibles. Il y a 2! possibilités.
  - puis définir les images des 4 autres nombres pairs. Il y a 4! possibilités.
  - puis définir les images des 2 autres nombres divisible par 3 (mais pas par 2) : 2! possibilités.
  - puis définir les images des autres nombres. Il y a $(12 - 2 - 4 - 2)! = 4!$ possibilités.

  $\boxed{\text{Il y a } 2!4!2!4! = 2\,304 \text{ permutations de } \mathbb{N}_{12} \text{ vérifiant les deux propriétés.}}$

— La stratégie est maintenant le même, mais il ne s'agit plus de permutations mais des listes avec répétition.
  — Cas de nombres pairs.
  Définir les applications f de $\mathbb{N}_{12}$ dans lui-même possédant la propriété : si n est pair, alors $f(n)$ est pair consiste exactement à définir :
    - définir l'image des 6 nombres paires, parmi les 6 nombres possibles. Il y a 6^6 possibilités.
    - puis définir les images des nombres impairs, parmi tous les nombres : 12^6 possibilités.

  $\boxed{\text{Il y a } 6^6 \times 12^6 = 72^6 = 139\,314\,069\,504 \text{ applications de } \mathbb{N}_{12} \text{ dans lui-même telles que si } n \text{ est pair, alors } f(n) \text{ est pair.}}$

  — Cas des nombres divisibles par 3 Définir les applications f de $\mathbb{N}_{12}$ dans lui-même possédant la propriété : si n est divisible par 3, alors $f(n)$ aussi, consiste exactement à définir :
    - définir l'image des 4 nombres divisibles par 3 ($\{3, 6, 9, 12\}$), parmi les 4 nombres possibles. Il y a 4^4 possibilités.
    - puis définir les images des autres nombres, parmi tous les nombres. Il y a 12^8 possibilités.

  $\boxed{\text{Il y a } 4^4 12^8 = 24^8 = 110\,075\,314\,176 \text{ applications de } \mathbb{N}_{12} \text{ dans lui-même telles que si } n \text{ est divisible par 3, alors } f(n) \text{ également.}}$

  — Cas des nombres pairs et des nombres divisibles par 3 Définir les applications f de $\mathbb{N}_{12}$ dans lui-même possédant les deux propriétés consiste exactement à définir :
    — définir l'image des 2 nombres divisibles par 6 (par 2 et par 3) ($\{6, 12\}$), parmi les 2 nombres possibles. Il y a 2^2 possibilités.
    - puis définir les images des 4 autres nombres pairs, parmi les 6 nombres pairs. Il y a 6^4 possibilités.
    - puis définir les images des 2 autres nombres divisible par 3 (mais pas par 2) parmi les 4 possibles. Il y a 4^2 possibilités.
    - puis définir les images des autres nombres. Il y a 12^4 possibilités.

  $\boxed{\text{Il y a } 2^2 \times 6^4 \times 4^2 \times 12^4 = 8^2 \times 72^4 = 1\,719\,926\,784 \text{ applications de } \mathbb{N}_{12} \text{ dans lui-même vérifiant les deux propriétés.}}$

Problème - Nombres de surjection

A. Relation de récurrence

Dans cet exercice on étudie une suite à double, notée $\big(S(p,n)\big)_{p,n\geqslant 1}$, définie par récurrence.
On cherche à exprimer explicitement ce coefficient.
On suppose :

$$\forall\, p,n\in\mathbb{N}^* : \qquad S(p,1)=1, \qquad S(p,n)=0 \text{ si } p<n \qquad \text{et} \qquad S(p,n)=n\big(S(p-1,n)+S(p-1,n-1)\big)$$

1. Nous écrirons deux nombres par case : celui obtenu par addition comme pour le triangle de Pascal (en petit), puis celui obtenu par la multiplication par n.

$$S(p,n)=n\times\big(\underbrace{S(p-1,n)+S(p-1,n-1)}_{\text{petit nombre}}\big)$$

C'est ce dernier qui est le nombre $S(p,n)$.

$p\backslash n$	1	2	3	4	5	6	7
1	^{1} 1						
2	^{1} 1	^{1} 2					
3	^{1} 1	^{3} 6	^{2} 6				
4	^{1} 1	^{7} 14	^{12} 36	^{6} 24			
5	^{1} 1	^{15} 30	^{50} 150	^{60} 240	^{24} 120		
6	^{1} 1	^{31} 62	^{180} 540	^{390} 1560	^{360} 1800	^{120} 720	
7	^{1} 1	^{63} 126	^{602} 1806	^{2100} 8400	^{3360} 16 800	^{2520} 15 120	^{720} 5040

2. On peut faire une récurrence, mais on peut aussi remarquer que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad S(n,n)=n(S(n-1,n)+S(n-1,n-1))=nS(n-1,n-1)\Longrightarrow \frac{S(n,n)}{n!}=\frac{S(n-1,n-1)}{(n-1)!}$$

et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S(n,n)=n!$.
Puis, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S(n+1,n)=n(S(n,n)+S(n,n-1))=nn!+nS(n,n-1)$.
Notons $v_k=\dfrac{S(k+1,k)}{k!}$, on a donc

$$v_n=\frac{S(n+1,n)}{n!}=n+\frac{S(n,n-1)}{(n-1)!}=n+v_{n-1}$$

donc par télescopage :

$$v_n-v_0=\sum_{k=0}^{n-1}v_{k+1}-v_k=\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}$$

Et comme $v_0=S(1,0)=0$ on a donc

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad S(n+1,n)=n!v_n=n!\binom{n+1}{2}}$$

3. Posons, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_p$: « $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n^p=\displaystyle\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}S(p,h)$ ».

— Pour $p=1$: $\displaystyle\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}S(1,h)=\binom{n}{0}S(1,0)+\binom{n}{1}S(1,1)=1\times 0+n\times 1=n$.
Donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

— Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_p$ est vraie.
On va démontrer que $\mathcal{P}_{p+1}$ est alors vraie. Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}S(p+1,h)=\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h}h\big(S(p,h)+S(p,h-1)\big)$$

La somme commence à $h=1$; dans le cas $h=0$, le nombre additionné est nul.
Puis comme $\displaystyle\binom{n}{h}h=\frac{n!}{h!(n-h)!}h=\frac{n(n-1)!}{(h-1)!((n-1)-(h-1))!}=n\binom{n-1}{h-1}$ (si $n\geqslant 1$)

$$\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}S(p+1,h)=n\left(\sum_{h=1}^{n}\binom{n-1}{h-1}S(p,h)+\sum_{h=1}^{n}\binom{n-1}{h-1}S(p,h-1)\right)$$

Puis en faisant le changement d'indice $k = h$ dans la première somme et $k = h-1$ dans la seconde :

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}S(p+1,h) &= n\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}S(p,k)+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}S(p,k)\right)\\ &= n\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right)S(p,k)+\binom{n-1}{0}S(p,0)\right]\end{aligned}$$

Et d'après la formule du triangle de Pascal (et comme $S(p,0)=0$) :

$$\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}S(p+1,h) = n\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}S(p,k)\right] = n\times n^p = n^{p+1}$$

d'après la relation $\mathcal{P}_p$ qui est vraie.

Par conséquent, on a prouvé que dans ce cas $\mathcal{P}_{p+1}$ est également vraie.

Donc la récurrence est démontrée et

$$\boxed{\text{pour tout } n,p\in\mathbb{N}^*,\ n^p=\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}S(p,h).}$$

4. Soit $q \leqslant k \leqslant n$.

$$\begin{aligned}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{q} &= (-1)^{k-q}(-1)^q\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{q!}(q-k)! = (-1)^{k-q}(-1)^q\frac{n!}{(n-k)!q!(q-k)!}\\ &= (-1)^q\frac{n!}{q!(n-q)!}\frac{(n-q)!}{(q-k)!(n-k)!}(-1)^{k-q}\end{aligned}$$

et comme $n-k=(n-q)-(k-q)$, on en déduit

$$\boxed{\forall\ q\leqslant k\leqslant n\in\mathbb{N},\ (-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{q} = (-1)^q\binom{n}{q}\times\binom{n-q}{k-q}(-1)^{k-q}}$$

On a alors avec le changement d'indice $h=k-q$:

$$\sum_{k=q}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{q} = (-1)^q\sum_{k=q}^{n}(-1)^{k-q}\binom{n}{q}\binom{n-q}{k-q} = (-1)^q\binom{n}{q}\sum_{h=0}^{n-q}\binom{n-q}{h}(-1)^h$$

$$\boxed{\sum_{k=q}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{q} = \begin{cases}(-1)^q\binom{n}{q}(-1+1)^{n-q}=0 & \text{si}\quad n-q>0\\ (-1)^n & \text{si}\quad n-q=0\end{cases}}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

5. D'après la question 3 qui exprime k^p en fonction d'une somme :

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}S(p,h)\right) = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{h=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{h}S(p,h)\right)$$

Or on peut intervertir les deux sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{k}\cdots = \sum_{0\leqslant h\leqslant k\leqslant n}\cdots = \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=h}^{n}\ldots$ Donc

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p = (-1)^n\sum_{h=0}^{n}\left(\sum_{k=h}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{h}S(p,h)\right) = (-1)^n\sum_{h=0}^{n}S(p,h)\left(\sum_{k=h}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{h}\right)$$

Or nous avons vu que $\displaystyle\sum_{k=h}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{h}=0$ dès que $n>h$, il reste donc le cas $h=n$:

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p = (-1)^n\left(\sum_{h=0}^{n-1}S(p,h)\times 0+\underbrace{S(p,n)\left((-1)^n\right)}_{h=n}\right) = S(p,n)$$

On a bien

$$\boxed{S(p,n)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p}$$

B. Nombre de surjections

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note E_k un ensemble à k éléments.

1. Nous avons vu en cours que s'il y a une surjection f de E_p sur E_n, alors $f(E_p) \subset E_n$,
 donc $\text{Card}(f(E_p)) = \text{Card}(f(E_n)) = n$.
 Or nécessairement, $\text{Card}(f(E_p)) \leqslant \text{Card}(E_p) = p$. Et donc nécessairement $p \geqslant n$.
 Par contraposée :
 $$\boxed{\text{si } p < n, \text{ il n'y a aucune surjection de } E_p \text{ sur } E_n.}$$

2. Si $p = n$, les surjections sont alors des bijections et donc (d'après le cours) :
 $$\boxed{\text{il y a } n! \text{ surjections de } E_n \text{ sur } E_n.}$$

3. Une surjection s de E_{n+1} sur E_n est parfaitement définie par :
 — le choix de la paire $\{a,b\}$ de E_{n+1} ayant la même image par s : $\binom{n+1}{2}$ possibilités.
 — puis, le choix de l'image notée c pour cette paire (dans E_n) : n possibilités.
 — puis, le choix de la bijection de $E_{n+1} \setminus \{a,b\}$ sur $E_n \setminus \{c\}$: $(n-1)!$ possibilités.
 $$\boxed{\text{il y a donc } \binom{n+1}{2} n! \text{ surjection de } E_{n+1} \text{ sur } E_n.}$$

On note $s(p,n)$, le nombre de surjections de E_p sur E_n.

4. Considérons une surjection de E_p sur E_n. On raisonne sur $s(p) = k$.
 Il y a n valeurs possibles pour cette image k.
 PUIS, on considère $s^{-1}(k)$, l'ensemble des antécédents de k par s.
 Cet ensemble contient nécessairement p.
 Il y a deux possibilités :
 — ou bien $s^{-1}(k)$ est réduit au seul élément p.
 Alors on peut décrire s à partir de la surjection de $\overline{s} : E_{p-1} \to E_n \setminus \{k\}$, telle que :
 $$\forall\, x \in E_{p-1}, \qquad s(x) = \overline{s}(x) \qquad \text{et} \qquad s(p) = k$$
 Il y a donc $s(p-1, n-1)$ telle possibilités.
 — ou bien $s^{-1}(k)$ contient plusieurs éléments, autre que p.
 Alors on peut décrire s à partir de la surjection de $\overline{s} : E_{p-1} \to E_n$, telle que :
 $$\forall\, x \in E_{p-1}, \qquad s(x) = \overline{s}(x) \qquad \text{et} \qquad s(p) = k$$
 Il y a donc $s(p-1, n)$ telle possibilités.
 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, fixé,
 $s(p-1,n) + s(p-1,n-1)$ est le nombre de surjections s de E_p dans E_n tel que $s(p) = k$.
 Puis :
 $$\boxed{\forall\, p, n \in \mathbb{N}, \qquad s(p,n) = n\big(s(p-1,n) + s(p-1,n-1)\big)}$$

Remarques !

Dans la partie précédente, on trouve :

$$\textit{pour tout } n, p \in \mathbb{N}^*, \qquad n^p = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} S(p,h)$$

Cette formule s'explique très simplement.
On note $\mathcal{F}(E_p, E_n)$, l'ensemble des applications de E_p dans E_n. On sait que $Card(\mathcal{F}(E_p, E_n) = n^p$.
Puis, chacune de ces applications peut être paramétrées par le cardinal de $f(E_p)$.
On note
$$\mathcal{F}_h(E_p, E_n) = \{f : E_p \to E_n \mid Card(f(E_p)) = h\}$$
Alors, on a la réunion disjointe :
$$\mathcal{F}(E_p, E_n) = \bigcup_{h=0}^{n} \mathcal{F}_h(E_p, E_n) \qquad \Rightarrow \qquad n^p = \sum_{h=0} Card\big(\mathcal{F}_h(E_p, E_n)\big)$$
Or une application f de $\mathcal{F}_h(E_p, E_n)$ est parfaitement définie par :
— le choix de $f(E_p)$, il s'agit d'un sous-ensemble de E_n à h éléments : il y a $\binom{n}{h}$ possibilités ;
— le choix de la surjection de E_p sur $f(E_p)$ (de cardinal h) : il y a $s(p,h)$ possibilités.
$$n^p = \sum_{h=0} \binom{n}{h} s(p,h)$$

5. On considère $p \geqslant n$, fixés.
   On note S, l'ensemble des surjections de E_p sur E_n.
   On note pour tout $G_k \subset E_n$ (avec $\text{Card}(G_k) = k$) : $A_{G_k} = \mathcal{F}(E_p, E_n \setminus G_k)$.
   alors on a $\text{Card}(A_{G_k}) = (n-k)^p$, *dépend à* G_k *uniquement par son cardinal.*
   Puis :

$$\begin{aligned} s \in S & \Longleftrightarrow \forall\, y \in E_n, \exists\, x \in E_p \text{ tel que } s(x) = y \Longleftrightarrow \forall\, y \in E_n, s \notin A_{\{y\}} \Longleftrightarrow \forall\, y \in E_n, s \in \overline{A_{\{y\}}} \\ & \Longleftrightarrow s \in \textstyle\bigcap_{y \in E_n} \overline{A_{\{y\}}} \end{aligned}$$

   (où l'on a noté $\overline{F}$, l'ensemble complémentaire de F dans $\mathcal{F}(E_p, E_n)$)
   Donc $S = \displaystyle\bigcap_{y \in E_n} \overline{A_{\{y\}}}$, et ainsi $\overline{S} = \overline{\displaystyle\bigcap_{y \in E_n} \overline{A_{\{y\}}}} = \displaystyle\bigcup_{y \in E_n} A_{\{y\}}$.
   Ainsi

$$\begin{aligned} s(p,n) & = \text{Card}(S) = \text{Card}\big(\mathcal{F}(E_p, E_n)\big) - \text{Card}(\overline{S}) \\ & = p^n - \text{Card}\left(\bigcup_{y \in E_n} A_{\{y\}}\right) = p^n - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{y_1, \dots y_k \in E_n} \text{Card}\big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{\{y_j\}}\big) \right) \end{aligned}$$

   en appliquant la formule du crible de Poincaré car $A_{\{y_1\}}$ et $A_{\{y_2\}}$ ...ne sont pas disjoints. Ainsi :

$$\begin{aligned} s(p,n) & = n^p - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{y_1, \dots y_k \in E_n} \text{Card} A_{\{y_1, y_2, \dots y_k\}} \right) \\ & = n^p - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{y_1, \dots y_k \in E_n} (n-k)^p \right) = n^p - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left((n-k)^p \sum_{y_1, \dots y_k \in E_n} 1 \right) \\ & = n^p + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left((n-k)^p \binom{n}{k} \right) = (-1)^0 \binom{n}{0} n^p + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^p \\ & = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^p = \sum_{h=0}^{n} (-1)^{n-h} \binom{n}{n-h} h^p \end{aligned}$$

   avec le changement de variable $h = n - k$. Puis par symétrie du coefficient binomial

$$\boxed{s(p,n) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{-k} \binom{n}{k} k^p = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p}$$

6. Il s'agit donc ici d'attribuer à chacun des 7 pions, que l'on peut numérotés de 1 à 7 une case, que l'on peut numérotées de 1 à 4 de sorte qu'aucune ne soit vide.
   Il s'agit donc de créer une surjection de N_7 sur N_4.
   On exploite le tableau vu en début de devoir :

Il y a donc $s(7,4) = (-1)^4 \displaystyle\sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{4}{k} k^7 = 8\,400$ distributions différentes de 7 pions sur un damier à 4 cases sans case vide.