Devoir à la maison n°9

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice

Combien existe-t-il de bijections f de $\mathbb{N}_{12}$ dans lui-même possédant :
— la propriété : si n est pair, alors $f(n)$ est pair ?
— la propriété : si n est divisible par 3, alors $f(n)$ aussi ?
— les deux propriétés précédentes ?
— Reprendre ces questions en remplaçant « bijections »par « applications ».

Problème - Nombres de surjection

A. Relation de récurrence

Dans cet exercice on étudie une suite à double, notée $\big(S(p,n)\big)_{p,n\geqslant 1}$, définie par récurrence.
On cherche à exprimer explicitement ce coefficient.
On suppose :

$$\forall\, p,n \in \mathbb{N}^* : \quad S(p,1)=1, \qquad S(p,n)=0 \text{ si } p<n \qquad \text{et} \qquad S(p,n)=n\big(S(p-1,n)+S(p-1,n-1)\big)$$

1. En s'inspirant du triangle de Pascal, construire une table des $S(p,n)$ pour $0<p\leqslant 7$ et $0<n\leqslant 7$. *$S(p,n)$ sera localisé en ligne p et colonne n*
2. Montrer que $S(n+1,n)=n!\dbinom{n+1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $n,p\in\mathbb{N}^*$, $n^p=\displaystyle\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}S(p,h)$.
4. Montrer que pour tout $q\leqslant k\leqslant n\in\mathbb{N}$, $(-1)^k\dbinom{n}{k}\dbinom{k}{q}=(-1)^q\dbinom{n}{q}\times\dbinom{n-q}{k-q}(-1)^{k-q}$,
   puis que si $q<n$: $\displaystyle\sum_{k=q}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{q}=0$ (on pourra faire un changement de variable).
   Que vaut $\displaystyle\sum_{k=n}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{q}$?
5. Déduire des deux questions précédentes :
$$S(p,n)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p$$

B. Nombre de surjections

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note E_k un ensemble à k éléments.

1. Montrer que si $p<n$, il n'y a aucune surjection de E_p sur E_n.
2. Combien existe-t-il de surjection de E_n sur E_n.
3. Combien existe-t-il de surjection de E_{n+1} sur E_n.

On note $s(p,n)$, le nombre de surjections de E_p sur E_n.

4. Montrer par un raisonnement ensembliste (combinatoire) que :
$$\forall\, p,n\in\mathbb{N}, s(p,n)=n\big(s(p-1,n)+s(p-1,n-1)\big)$$
5. Montrer par un raisonnement ensembliste (combinatoire) que :
$$s(p,n)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p$$
6. Application : Combien existe-t-il de distributions différentes de 7 pions sur un damier à 4 cases, de manière à ce qu'aucune case ne soit vide ?