Devoir à la maison n°8
CORRECTION

Exercice - Espace vectoriel de matrices

1. (a) Par linéarité de l'écriture de $M(a,b) = aM(1,0) + bM(0,1)$: $\mathcal{F} = \{aI + bA \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(I,A)$.

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

(b) On sait déjà que $\mathcal{F} = \text{vect}(I,A)$. Donc I et A sont générateurs de $\mathcal{F}$
De plus montrons que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants.
Soient λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda I + \mu A = 0 = (M(0,0))$.
Or cette matrice nulle ne peut être obtenue que si $\lambda = \mu = 0$.
Donc (I,A) est une famille libre.

$$\boxed{(I,A) \text{ est une base de } \mathcal{F}, \text{ qui est donc de dimension 2.}}$$

(c) La matrice des composantes de la famille $(A+I, A-2I)$ dans la base (A,I) est

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

(d) Montrons que P est inversible par l'algorithme de Gauss Jordan donne : avec $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Puis avec $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2$ et $L_2 \leftarrow \frac{-1}{3}L_2$, on a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.
Donc P est inversible, d'inverse $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\boxed{\big((A+I),(A-2I)\big) \text{ est une base de } \mathcal{F}}.$$

(e) $A = \frac{1}{3}[2(A+I) + (A-2I)]$ et $I = \frac{1}{3}[(A+I) - (A-2I)]$.
Donc $M(a,b) = aI + bA = \frac{1}{3}\big[a[(A+I) - (A-2I)] + b[2(A+I) + (A-2I)]\big]$
Ainsi,

$$\boxed{M(a,b) = \frac{a+2b}{3}[A+I] + \frac{-a+b}{3}[A-2I]}$$

2. (a) $(A+I) \times (A-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{(A+I) \times (A-2I) = 0}$$

(b) $(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(A+I)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(A+I)^{n+1} = (A+I)^{n-1} \times (A+I)^2 = (A+I)^{n-1} \times 3 \times (A+I) = 3(A+I)^n$.
Posons $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$:« $(A+I)^n = 3^{n-1}(A+I)$ ».
— Comme $(A+I)^1 = A+I = 3^0(A+I)$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie. (On a vu aussi pour $\mathcal{P}_2$).
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ vraie.
Alors comme $(A+I)^{n+1} = 3(A+I)^n = 3 \times 3^{n-1}(A+I)$, car $\mathcal{P}_n$ est vraie.
et donc $(A+I)^{n+1} = 3^n(A+I)$ ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie,
et la récurrence est démontrée. Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \;:\; (A+I)^n = 3^{n-1}(A+I)}$$

(c) $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = -3(A-2I)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(A-2I)^{n+1} = (A-2I)^{n-1} \times \big(-3(A-2I)\big) = -3(A-2I)^n$.

Posons $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_n$: « $(A-2I)^n = (-3)^{n-1}(A-2I)$ »

— Comme $(A-2I)^1 = A-2I = (-3)^0(A-2I)$. Donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie. (On a vu aussi pour $\mathcal{Q}_2$).

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}_n$ vraie.
Alors comme $(A-2I)^{n+1} = -3(A-2I)^n = -3 \times (-3)^{n-1}(A-2I)$, car $\mathcal{Q}_n$ est vraie.
et donc $(A-2I)^{n+1} = (-3)^n(A-2I)$ ainsi $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie,

et la récurrence est démontrée. Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ : \ (A-2I)^n = (-3)^{n-1}(A-2I)}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $\big(M(a,b)\big)^n = \left(\dfrac{a+2b}{3}[A+I] + \dfrac{-a+b}{3}[A-2I]\right)^n$

Mais comme : $(A+I) \times (A-2I) = 0 = (A-2I) \times (A+I)$, les matrices $A+I$ et $A-2I$ commutent (polynôme en A) ; on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \big(M(a,b)\big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n (A+I)^k \times \left(\frac{-a+b}{3}\right)^n (A-2I)^{n-k} \\ &= (A+I)^n + (A-2I)^n = \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n 3^{n-1}(A+I) + \left(\frac{a-b}{-3}\right)^n (-3)^{n-1}(A-2I) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\big(M(a,b)\big)^n = \frac{(a+2b)^n}{3}(A+I) - \frac{(a-b)^n}{3}(A-2I)}$$

3. Enfin,

$$\boxed{A^n = [M(0,1)]^n = \frac{2^n}{3}(A+I) - \frac{(-1)^n}{3}(A-2I)}$$

Problème - Deux espaces de matrices

Partie I : Structure

1. Question de cours :

$$\boxed{\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 9}$$

2. $A \times 0 = 0$, donc $0 \in E_1(A)$ et donc $E_1(A)$ est non vide.
Soient M_1, M_2 deux éléments de $E_1(A)$ et λ_1, λ_2 deux nombres réels.
Il s'agit de montrer que $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in E_1(A)$.
Or $A \times (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = \lambda_1 A \times M_1 + \lambda_2 A \times M_2 = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$
car $AM_1 = M_1$, $AM_2 = M_2$ puisque M_1 et $M_2 \in E_1(A)$.
Donc $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ vérifie la propriété caractéristique de $E_1(A)$, donc $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in E_1(A)$.

$$\boxed{E_1(A) \text{ est un sous espace vectoriel de } M_3(\mathbb{R}).}$$

3. (a) Considérons $M \in E_1(A)$, est-il dans $E_2(A)$?
On a $A^2 \times M = A \times (A \times M) = A \times M = M$ car $M \in E_1(A)$ donc $AM = M$.
Ainsi $M \in E_2(A)$. Par conséquent

$$\boxed{E_1(A) \subset E_2(A)}$$

(b) Supposons ici que A est inversible et notons A^{-1} l'inverse de A.
Nous savons déjà que $E_1(A) \subset E_2(A)$, pour montrer (ici) l'égalité de ces deux ensembles, il ne reste plus qu'à montrer l'inclusion réciproque.
Considérons donc $M \in E_2(A)$.
Alors $A^2 M = AM$ et donc en multipliant à gauche cette égalité par A^{-1}, on a :
$A^{-1}A^2 M = A^{-1}AM$ et donc $(A^{-1}A)AM = AM = M$ ainsi $M \in E_1(A)$.
Par double inclusion

$$\boxed{\text{si } A \text{ est inversible alors } E_1(A) = E_2(A).}$$

4. (a) Supposons que $A - I$ soit inversible, notons B l'inverse de $A - I$, donc $B \times (A - I) = I$.
Soit $M \in E_1(A)$, alors $AM = M$, donc $AM - M = 0$ ou encore $(A - I) \times M = AM - M = 0$.
En multipliant cette dernière égalité par B, on a $B \times (A - I) \times M = B \times 0 = 0$.
Or $B \times (A - I) = I$, donc $I \times M = M = 0$.
Par conséquent M est nécessairement la matrice nulle et donc $E_1(A) \subset \{0\}$.
Réciproquement, nous avons vu que $0 \in E_1(A)$ (quelle que soit la matrice A).
Donc par double inclusion :

$$\boxed{\text{si } A - I \text{ est inversible alors } E_1(A) = \{0\}.}$$

(b) $B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Toute matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si les coefficients sur sa diagonale sont non nuls.
Ici $B - I$ est triangulaire supérieure, avec sur la diagonale des coefficients non nuls.
Donc $B - I$ est inversible et donc d'après la question précédente, $E_1(B) = \{0\}$.
Par ailleurs, pour les mêmes raisons, B est lui-même inversible et donc d'après 3.(b), $E_1(B) = E_2(B)$.
Par conséquent, pour cet exemple

$$\boxed{E_1(B) = E_2(B) = \{0\}}$$

Partie II : Étude d'un cas particulier

1. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan. Considérons

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_3 \\ L_3 \leftarrow -L_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Par suite d'opérations élémentaires, nous avons transformé P en I_3 donc $\underline{P \text{ est inversible}}$.
Par suite des mêmes opérations élémentaires, nous avons transformé I_3 en P^{-1}, donc

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

2. Faisons le calcul :

$$C \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} \times CP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } D = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est bien une matrice diagonale.}}$$

3. Notons que $N = P^{-1}M$, donc $PN = PP^{-1}M = M$

$$M \in E_1(C) \iff C \times M = M \iff C \times PN = PN \iff P^{-1} \times CPN = P^{-1}PN$$

Il y a bien équivalence, car P^{-1} est inversible. Donc

$$M \in E_1(C) \iff (P^{-1}CP) \times N = N \iff D \times N = N \iff N \in E_1(D)$$

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En notant $N = P^{-1}M$, on a l'équivalence :

$$\boxed{M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D).}$$

4. Considérons une matrice N de la forme la plus générale : $N = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$.

$$N \in E_1(D) \iff D \times N = N$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Cela est *équivalent* à $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ et $2x_3 = x_3$, donc $x_3 = 0$ et de même $y_3 = z_3 = 0$.
Nous n'avons raisonner qu'en équivalence, pour obtenir finalement aucune condition particulière sur les coefficients de la deuxième ligne de N, les autres coefficients étant nuls.
Finalement nous avons montré :

$$\boxed{N \in E_1(D) \text{ si et seulement s'il existe trois réels } a,\ b \text{ et } c \text{ tels que } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

5. D'après les questions précédentes nous pouvons affirmer :

$$M \in E_1(C) \iff P^{-1}M \in E_1(D) \iff \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } P^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } M = P \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par équivalence :

$$\boxed{E_1(C) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}$$

Ces trois matrices forment clairement une famille libre, nous avons donc une base et

$$\boxed{\dim\big(E_1(C)\big) = 3.}$$

6. Nous allons appliquer le même raisonnement que lors des trois questions précédentes :

$$M \in E_2(C) \iff C^2M = CM \iff P^{-1}C(PP^{-1})CPN = P^{-1}CPN \text{ (en notant } N = P^{-1}M)$$

$$M \in E_2(C) \iff D^2N = DN \iff N \in E_2(D)$$

Or avec $N = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$, on a $D^2N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 4x_3 & 4y_3 & 4z_3 \end{pmatrix}$ et $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \end{pmatrix}$.
Donc

$$N \in E_2(D) \iff \exists\, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \text{ tels que } N = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$M \in E_2(C) \iff \exists\, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \text{ tels que } M = P \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

Par équivalence :

$$\boxed{\begin{gathered} E_1(C) = \left\{ \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\} \\ E_1(C) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{gathered}}$$

Ces trois matrices forment clairement une famille libre, nous avons donc une base et

$$\boxed{\dim\big(E_2(C)\big) = 6. \text{ Donc } E_1(C) \neq E_2(C).}$$