

Devoir surveillé n°5

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (*) voire (**).

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.**

BON COURAGE

Problème - Polynômes de Legendre

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble (*$\mathbb{R}$ -espace vectoriel*) des polynômes à coefficients réels.

Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble (*sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$*) des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n -ième.

On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \phi(P) = (X^2 - 1) P'' + 2XP'$$

Et pour P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt.$$

Enfin Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$.

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*.

A. Quelques résultats généraux

1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2} (3X^2 - 1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de $a_n = [L_n]_n$.

Par la suite, pour tout entier naturel n , a_n désigne le coefficient dominant de L_n .

3. (a) Montrer que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tel que $P = \sum_{k=0}^n b_k L_k$.

On pourra faire une récurrence forte.

- (b) Montrer que la famille $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ainsi associée à tout P est unique.

4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n , en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1, 1[$ et un réel λ , que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U'_n = \lambda (X - 1)^{n-1} (X + 1)^{n-1} (X - \alpha).$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

- (b) Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $] -1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu (X - 1)^{n-k} (X + 1)^{n-k} (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_k)$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $] -1, 1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu (X - 1)^{n-k-1} (X + 1)^{n-k-1} (X - \beta_1) \cdots (X - \beta_{k+1})$$

- (c) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$.
On les note $x_1, \dots, x_n$, en convenant que $x_1 < \dots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^n (X - x_k).$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = a_n A_n = a_n \prod_{k=1}^n (X - x_k)$.

B. Etude de l'application ϕ

Dans toute cette partie, n désigne un entier fixé quelconque.

1. Prouver que pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \phi(P) + \mu \phi(Q)$
On dit que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On dit que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ .

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ .

Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi_n(P) = \phi(P)$$

3. Vérifier que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (X^2 - 1) U'_k - 2kXU_k = 0$$

4. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question précédente, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que :

$$(X^2 - 1) U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1) U_k^{(k)} = 0$$

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(L_n) = n(n+1)L_n$

On dit que le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n , en précisant la valeur propre associée.

C - Produit scalaire associé à (L_n)

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifie les propriétés suivantes :

$$(i) \forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$$

$$(ii) \forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q \rangle = \lambda_1 \langle P_1, Q \rangle + \lambda_2 \langle P_2, Q \rangle$$

$$(iii) \forall P \in \mathbb{R}[X], \langle P, P \rangle \geq 0$$

$$(iv) (*) \forall P \in \mathbb{R}[X], \langle P, P \rangle = 0 \implies P = 0$$

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note alors $\| \cdot \|$ l'application définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^1 f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

On dit que $\| \cdot \|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

2. Etablir que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1) P'(t) Q'(t) dt$, puis que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle$$

3. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall i \neq j \in \mathbb{N}, \langle L_i, L_j \rangle = 0$$

On pourra utiliser la question **B.5.**

4. En exploitant, A.3. montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle P, L_n \rangle = 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note pour tout $k \leq 2n$, $u_k = \langle U_n^{(k)}, U_n^{(2n-k)} \rangle$

(a) Montrer que $((-1)^k (u_k))_{0 \leq k \leq 2n}$ est constant et donner sa valeur.

(b) En déduire que $\|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$

D. Application à l'approximation d'intégrales

Dans les questions suivantes, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $2n$ réels $t_1 < \dots < t_{2n}$ vérifiant : $\forall i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, h(t_i) = 0$.
Montrer qu'il existe un réel $c \in [t_1, t_{2n}]$ tel que : $h^{(2n-1)}(c) = 0$.

2. On note

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \int_{-1}^1 P(t) dt \end{aligned}$$

et on rappelle que les $x_1, \dots, x_n$ désignent les racines de L_n et qu'elles sont deux à deux distinctes.

- (a) Donner (sans démonstration) l'expression de la famille des polynômes, notés ici M_k vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \forall i \in \mathbb{N}_n, \quad M_k(x_i) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \quad \deg(M_k) \leq n-1$$

- (b) On note, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_k = \Psi(M_k)$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \Psi(P) = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(x_k) \quad (1)$$

3. Montrer que la relation (1) trouvée à la question précédente reste vérifiée pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

On pourra, pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, utiliser la division euclidienne de P par L_n et la question C.4.

4. On note $N_k = M_k^2$, où M_k est défini en 2.(a).

- (a) Quel est le degré de N_k ?

- (b) Calculer $N_k(x_k)$. Montrer que pour $j \neq k$, $N_k(x_j) = N'_k(x_j) = 0$

- (c) Donner l'expression formelle de N'_k , en déduire que $N'_k(x_k) = \sum_{j \neq k} \frac{2}{x_k - x_j}$.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_k = N'_k(x_k)$

Dans la suite du problème, f désigne une application de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1, 1]$.

5. On considère $H_n(X) = \sum_{k=1}^n [f(x_k) + (X - x_k)(f'(x_k) - \alpha_k f(x_k))] \times N_k(X)$.

- (a) Montrer que $H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

- (b) Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} H_n(x_i) = f(x_i) \\ H'_n(x_i) = f'(x_i) \end{cases}$.

On rappelle que A_n a été défini à la fin de la partie A.

6. (*) Soit $x \in [-1, 1]$ tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \neq x_i$.

Montrer que : $\exists c_x \in [-1, 1], f(x) - H_n(x) = \frac{A_n(x)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c_x)$.

On pourra considérer l'application g définie sur $[-1, 1]$ par $g(t) = f(t) - H_n(t) - \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} K$, où K est un réel dépendant de x à préciser, et appliquer le résultat de la question D.1. à la fonction g' .

7. Montrer que : $\forall y \in [-1, 1], \exists c_y \in [-1, 1], f(y) - H_n(y) = \frac{A_n(y)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c_y)$.

8. Justifier l'existence de $M_{2n}(f) = \max_{t \in [-1, 1]} |f^{(2n)}(t)|$, puis prouver que :

$$\left| \int_{-1}^1 f(t) dt - (\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)) \right| \leq \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^1 A_n(t)^2 dt$$

9. Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\int_{-1}^1 A_n(t)^2 dt$.