Devoir surveillé n°6
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrement) selon la qualité des copies.

Problème - Polynômes de Legendre (d'après : CCP 2018 PC)

A. Quelques résultats généraux

1. $L_0 = \dfrac{1}{2^0 0!}U_0^{(0)} = U_0 = (X^2-1)^0 = 1$
$L_1 = \dfrac{1}{2^1 1!}U_1^{(1)} = \dfrac{1}{2}U_1' = \dfrac{1}{2}\big((X^2-1)'\big) = X$
$L_2 = \dfrac{1}{2^2 2!}U_2^{(2)} = \dfrac{1}{8}U_2'' = \dfrac{1}{8}\big((X^2-1)^2)''\big) = \dfrac{1}{8}(12X^2-4)$ /1

$$\boxed{L_1 = 1 \quad , \quad L_2 = X \quad , \quad L_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}}$$

2. Avec la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}X^{2k}$$

Or, on sait que pour tout entier k et n :

$$[X^{2k}]^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{(2k)!}{(2k-n)!}X^{2k-n} & \text{si } 2k-n \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } 2k-n < 0 \end{cases}$$

Par linéarité de la dérivation :

$$L_n = U_n^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}[X^2k]^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=\lceil \frac{n}{2}\rceil}^{n}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{(2k-n)!}(-1)^{n-k}X^{2k-n}$$

Le terme dominant de L_n est alors obtenu en $k=n$, il s'agit de : /3

$$\frac{1}{2^n n!}\binom{n}{n}\frac{(2n)!}{n!}(-1)^0 X^n = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}X^n$$

$$\boxed{\text{Ainsi } L_n \text{ est de degré } n \text{ et } a_n = [L_n]_n = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}.}$$

3. (a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

P_n : « $\forall\ P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P = n$, $\exists\ b_0, b_1, \ldots b_n \in \mathbb{R}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k L_k$ ».

— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg P = 0$. Donc P est une constante b_0.
Alors comme $L_0 = 1$, on a $P = b_0 L_0$.
Donc P_0 est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est vraie.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg P = n+1$. Supposons que le terme dominant de P soit $c_{n+1}X^{n+1}$.
On a donc $P = c_{n+1}X^{n+1} + Q$ avec $\deg Q < n+1$. Notons $R = P - \dfrac{2^{n+1}c_{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}}L_{n+1}$
Ainsi, R est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$,
avec pour coefficient d'indice $n+1$:

$$[R]_{n+1} = [P]_{n+1} - \frac{2^{n+1}c_{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}}[L_{n+1}]_{n+1} = c_{n+1} - \frac{2^{n+1}c_{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}}\frac{1}{2^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1} = 0$$

Donc $r := \deg(R) < n+1$. On peut alors appliquer P_r,
il existe $b_0, \dots b_r \in \mathbb{R}$ tel que $R = b_0 L_0 + \cdots + b_r L_r$.

En prenant $b_k = 0$ pour $k \in [\![r+1, n]\!]$ (si cet ensemble est non vide) et $b_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} c_{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}}$,

on a $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} b_k L_k$. Et donc P_{n+1} est vraie.

On a donc montrer par récurrence forte (sur le degré de P) : /3

$$\boxed{\text{pour tout polynôme } P \in \mathbb{R}[X], \text{ il existe } b_0, b_1, \dots b_n \in \mathbb{R} \text{ (avec } n = \deg P) \text{ tel que } P = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k.}$$

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, supposons que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k L_k = \sum_{k=0}^{n} b'_k L_k$. On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (b_k - b'_k) L_k = 0$.

Si $\{k \in [\![0, n]\!] \mid b_k \neq b'_k\}$ est non vide,

on peut considérer $K = \max\{k \in [\![0, n]\!] \mid b_k \neq b'_k\}$ et alors $\deg(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (b_k - b'_k) L_k) = K$.

Or ce polynôme est le polynôme nul.
On a donc une contradiction et $\{k \in [\![0, n]\!] \mid b_k \neq b'_k\}$ est donc vide.

Par conséquent, P admet une seule décomposition selon les $(L_k)_k$. /1

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } P \in \mathbb{R}[X], \text{ famille } (b_0, b_1, \dots b_n) \in \mathbb{R}^n \text{ associée est unique.}}$$

4. (a) On a directement la factorisation de U_n en produit d'irréductibles :

$$U_n = [(X-1)(X+1)]^n = (X-1)^n (X+1)^n$$

/0,5

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc } U_n \text{ possède 1 comme racine d'ordre (de multiplicité) } n \\ \text{et } -1 \text{ comme racine d'ordre } n \text{ également (et c'est tout).}\end{array}}$$

Si l'on dérive U_n (produit de polynôme), on trouve :

$$U'_n = n(X-1)^{n-1}(X+1)^n + n(X-1)^n(X+1)^{n-1} = n(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}[X+1+X-1] = 2nX(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}$$

On a donc /1

$$\boxed{U'_n = \lambda\ (X-1)^{n-1}\ (X+1)^{n-1}\ (X-\alpha) \ \text{ avec } \lambda = 2n, \alpha = 0}$$

Remarques !

L'énoncé original incite à exploiter le théorème de Rolle.
C'est beaucoup plus long (donc plus maladroit ?).
Alors pourquoi ? Sûrement parce que cela peut inspirer pour les questions suivantes...

(b) Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$$

On peut ordonner les racines de $U_n^{(k)}$ et supposer dans perte de généralité que l'on a :

$$-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < 1$$

On rappelle qu'on identifier polynôme et fonction polynomiale $U_n^{(k)} : x \mapsto \mu(x-1)^{n-k}(x+1)^{n-k}(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)$.

On note $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$. Soit $i \in \mathbb{N}_{k+1}$, $U_n^{(k)}(\alpha_{i-1}) = U_n^{(k)}(\alpha_i) = 0$.
On peut appliquer le théorème de Rolle entre ces deux points.
Il existe donc $\beta_i \in]\alpha_{i-1}, \alpha_i[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$.
On a ainsi trouver $k+1$ racines entrelacées et donc distinctes :

$$\alpha_0 = -1 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 \cdots < \alpha_{k-1} < \beta_k < \alpha_k < \beta_{k+1} < \alpha_{k+1} = 1$$

Par ailleurs, 1 et -1 sont, par hypothèse, deux racines d'ordre $n-k$ de $U_n^{(k)}$

Elles sont donc également racines d'ordre $n-k-1$ et $U_n^{(k+1)} = (U_n^{(k)})'$.

Enfin, $\deg U_n^{(k)} = (n-k)+(n-k)+k = 2n-k$, donc $\deg U_n^{(k+1)} = 2n-k-1$.

Or on a trouvé $(k+1)+2(n-k-1) = 2n-k-1$ racines à $U_n^{(k+1)}$ (avec la multiplicité), donc on a la factorisation de $U_n^{(k+1)}$:

$$\exists\, \nu \in \mathbb{R} \qquad U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$$

/2,5

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{il existe des réels } \beta_1,\ \ldots,\ \beta_{k+1} \text{ deux à deux distincts dans }]-1,1[\text{ et un réel } \nu \text{ tels que :}\\ U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})\end{array}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé et quelconque.
Si l'on note pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \leqslant n$,

$$\mathcal{H}_k : \ll \exists\, \beta_1 < \cdots < \beta_k \in]-1,1[\,, \exists\, \nu_k \in \mathbb{R} \text{ tels que } U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}) \gg$$

Alors on a vu que $\mathcal{H}_1$ est vraie (en question (a)), puis que $\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Donc d'après le principe de récurrence : pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.
En particulier, $\mathcal{H}_n$ est vraie. Ceci, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $U_n^{(n)}$ admet $k=n$ racines réelles simples, toutes dans $]-1,1[$. /0,5

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ L_n \text{ admet } k=n \text{ racines réelles simples, toutes dans } [-1,1].}$$

On les note $x_1,\ \ldots,\ x_n$, en convenant que $x_1 < \ldots < x_n$.

B. Etude de l'application ϕ

Dans toute cette partie, n désigne un entier fixé quelconque.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P + \mu Q) &= (X^2-1)(\lambda P + \mu Q)'' + 2X(\lambda P + \mu Q)'\\ &= (X^2-1)(\lambda P'' + \mu Q'') + 2X(\lambda P' + \mu Q')\\ &= \lambda(X^2-1)P'' + \mu(X^2-1)Q'') + \lambda(2XP') + \mu(2XQ')\\ &= \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)\end{aligned}$$

/1

$$\boxed{\text{Pour tout } P,Q \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)}$$

2. Il est admis que si P est un polynôme, $\phi(P)$ en est un également.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg P \leqslant n$.
Donc $\deg P' \leqslant n-1$ et $\deg 2XP' = \deg 2X + \deg P' \leqslant 1 + (n-1) = n$
Et $\deg P'' \leqslant n-2$ et $\deg(X^2-1)P'' = \deg(X^2-1) + \deg P'' \leqslant 2 + (n-2) = n$
Enfin, $\deg(\phi(P)) = \deg((X^2-1)P'' + 2XP') \leqslant \max\big(\deg(2XP'), \deg((X^2-1)P'')\big) \leqslant n$. /1,5

$$\boxed{\text{Donc pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X],\ \phi(P) \in \mathbb{R}_n[X].}$$

3. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$$U_k = (X^2-1)^k \Longrightarrow U_k' = k \times 2X \times (X^2-1)^{k-1}$$

Donc

$$(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 2kX(X^2-1)^k - 2kX(X^2-1)^k = 0$$

/1

$$\boxed{\forall\, k \in [\![0,n]\!], \qquad (X^2-1)\,U_k' - 2kXU_k = 0}$$

4. On fait ce qui est demandé, on dérive $k+1$ fois
et on exploite la linéarité et deux fois la formule de Leibniz :

$$\sum_{h=0}^{k+1}\binom{k+1}{h}(X^2-1)^{(h)}(U_k')^{(k+1-h)} - 2k\sum_{h=0}^{k+1}\binom{k+1}{h}X^{(h)}U_k^{(k+1-h)} = 0$$

Puis $(X^2-1)^{(0)} = X^2-1$, $(X^2-1)^{(1)} = 2X$, $(X^2-1)^{(2)} = 2$ et $(X^2-1)^{(h)} = 0$ pour $h \geqslant 3$.
et aussi $X^{(0)} = X$, $X^{(1)} = 1$, $X^{(h)} = 0$ pour $h \geqslant 2$.
Donc

$$\sum_{h=0}^{2}\binom{k+1}{h}(X^2-1)^{(h)}U_k^{(k+2-h)} - 2k\sum_{h=0}^{1}\binom{k+1}{h}X^{(h)}U_k^{(k+1-h)} = 0$$

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)}+2(k+1)XU_k^{(k+1)}+(k+1)kU_k^{(k)}-2kXU_k^{(k+1)}-2k(k+1)U_k^{(k)}=0$$

/2,5

$$\boxed{(X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}-k(k+1)U_k^{(k)}=0}$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par linéarité de ϕ,

$$\phi(L_n)=\phi(2^n n! U_n^{(n)})=2^n n!\phi(U_n^{(n)})$$

Et, d'après la question précédente :

$$\phi(U_n^{(n)})=(X^2-1)U_n^{(n+2)}+2XU_n^{(n+1)}=n(n+1)U_n^{(n)}=n(n+1)2^n n! L_n$$

Donc en divisant par $2^n n!\neq 0$: /2

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\qquad \phi(L_n)=n(n+1)L_n.}$$

On dit que le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée.

C - Produit scalaire associé à (L_n)

1. Nous allons démontrer ces propriétés les unes après les autres

(i) Soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}Q(t)P(t)\mathrm{d}t=\langle Q,P\rangle$$

(ii) Soient $P_1,P_2,Q\in\mathbb{R}[X]$ et $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ Par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1P_1+\lambda_2P_2,Q\rangle &=\int_{-1}^{1}(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(t)Q(t)\mathrm{d}t=\lambda_1\int_{-1}^{1}P_1(t)Q(t)\mathrm{d}t+\lambda_2\int_{-1}^{1}P_2(t)Q(t)\mathrm{d}t\\ &=\lambda_1\langle P_1,Q\rangle+\lambda_2\langle P_2,Q\rangle\end{aligned}$$

(iii) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P,P\rangle=\int_{-1}^{1}P^2(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$$

car pour tout $t\in[-1,1]$, $P^2(t)\geqslant 0$ et que l'intégration est positive. /1

(iv) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, tel que $\langle P,P\rangle=0$.

Supposons qu'il existe $t_0\in[-1,1]$ tel que $P(t_0)\neq 0$.

alors comme $t\mapsto P^2(t)$ est <u>continue</u>,

il existe un voisinage de $P(t_0)$ tel que P est strictement positif sur ce voisinage, plus précisément :

$$\exists\ \alpha>0(\text{et } \delta>\gamma) \text{ tel que } \forall\ t\in]\gamma,\delta[:=]t_0-\alpha,t_0+\alpha[\cap]-1,1[, P^2(t)>\frac{P^2(t_0)}{2}>0$$

D'après la formule de Chasles (quitte à ce que les intégrales extrêmes soient vides) :

$$\int_{-1}^{1}P^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{\gamma}P^2(t)\mathrm{d}t+\int_{\gamma}^{\delta}P^2(t)\mathrm{d}t+\int_{\delta}^{1}P^2(t)\mathrm{d}t$$

Or par positivité : $\displaystyle\int_{-1}^{\gamma}P^2(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$, $\displaystyle\int_{\delta}^{1}P^2(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$,

et $\displaystyle\int_{\gamma}^{\delta}P^2(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_{\gamma}^{\delta}\frac{P^2(t_0)}{2}\mathrm{d}t=\frac{\delta-\gamma}{2}P^2(t_0)>0$

Donc $\displaystyle\int_{-1}^{1}P^2(t)\mathrm{d}t>0$.

On a montré : si il existe $t_0\in[-1,1]$ tel que $P(t_0)\neq 0$, alors $\langle P,P\rangle>0$.

Par contraposée : $\langle P,P\rangle=0$, alors $\forall\ t\in[-1,1]$, $P(t)=0$.

Et donc P admet une infinité de racines sur $[-1,1]$ et donc P est le polynôme nul.

Par conséquent : $\forall\ P\in\mathbb{R}[X]$, $\langle P,P\rangle=0\Longrightarrow P=0$ /3

$$\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

On note alors $\|\cdot\|$ l'application définie par : $\|f\|=\left(\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

On dit que $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$

2. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On réalise une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\langle \phi(P), Q\rangle &= \int_{-1}^{1} [(t^2-1)P''(t) + 2tP'(t)]Q(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \underbrace{P''(t)}_{u'(t)}\underbrace{(t^2-1)Q(t)}_{v(t)}\mathrm{d}t + 2\int_{-1}^{1} tP'(t)Q(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[P'(t)(t^2-1)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P'(t)(2tQ(t) + (t^2-1)Q'(t))\mathrm{d}t + 2\int_{-1}^{1} tP(t)Q(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t))\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or cette expression est totalement symétrique en P et Q. Donc $\langle \phi(P), Q\rangle = \langle \phi(Q), P\rangle$.
Puis d'après la première relation (i) du produit scalaire *$/1{,}5$*

$$\boxed{\forall\ (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q\rangle = -\int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right)\ P'(t)\ Q'(t)\,\mathrm{d}t = \langle P, \phi(Q)\rangle}$$

3. Soient $i \neq j \in \mathbb{N}$. Supposons que $i \neq 0$ (sans perte de généralité).
Comme $\Phi(L_i) = i(i+1)L_i$,

$$\langle L_i, L_j\rangle = \langle \frac{i(i+1)}{\phi}(L_i), L_j\rangle = \frac{1}{i(i+1)}\langle \phi(L_i), L_j\rangle = \frac{1}{i(i+1)}\langle L_i, \phi(L_j)\rangle = \frac{j(j+1)}{i(i+1)}\langle L_i, L_j\rangle$$

Donc $(i(i+1) - j(j+1))\langle L_i, L_j\rangle = 0$.
Or $i \neq j$, donc on peut supposer $i > j$ et donc $i(i+1) - j(j+1) > 0$, ainsi $\langle L_i, L_j\rangle = 0$ *$/2$*

$$\boxed{\forall\ i \neq j \in \mathbb{N}_n, \langle L_i, L_j\rangle = 0}$$

La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire.

4. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors d'après A.3. il existe $a_0, \dots a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k L_k$.
Et donc par linéarité du produit scalaire :

$$\langle P, L_n\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} a_k L_k, L_n \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \langle L_k, L_n\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \times 0 = 0$$

$/1{,}5$

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\ , \langle P, L_n\rangle = 0}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note pour tout $k \leqslant 2n$, $u_k = \langle U_n^{(k)}, U_n^{(2n-k)}\rangle$
   (a) Soit $k < 2n$, on réalise une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \langle U_n^{(k+1)}, U_n^{(2n-(k+1))}\rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{U_n^{(k+1)}(t)}_{u'(t)}\underbrace{U_n^{(2n-k-1)}(t)}_{v(t)}\mathrm{d}t \\ &= \left[U_n^{(k)}(t)U_n^{(2n-k-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} U_n^{(k)}(t)U_n^{(2n-k)}(t)\mathrm{d}t = -u_k\end{aligned}$$

car on sait que pour $k < n$, 1 et -1 sont racine de $U_n^{(k)}$ d'après A.4.(b).
Donc $(-1)^{k+1}u_{k+1} = -(-1)^{k+1}u_k = (-1)^k u_k$. Il reste à calculer u_0. *$/1$*
On fait le changement de variable : $t = \sin\theta$,
avec $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\theta \mapsto \sin\theta$ bijective de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_{-1}^{1} U_n^{(0)}U_n^{(2n)} = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \times (2n)!\mathrm{d}t = (2n)!\int_{-1}^{1} (t^2-1)^n\mathrm{d}t \\ &= (2n)!\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n\cos^{2n}\theta \times \cos\theta\mathrm{d}\theta = 2(-1)^n(2n)!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\end{aligned}$$

On reconnait une intégrale de Wallis : $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t)\mathrm{d}t$.
Avec une intégration par parties

$$W_n = \left[\sin(t)\cos^{2n}(t)\right]_0^{\pi/2} + (2n)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^{2n-1}(t)\mathrm{d}t = 2n(W_{n-1} - W_n)$$

Donc

$$W_n = \frac{2n}{2n+1}W_{n-1} = \cdots = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}W_0 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}\int_0^{\pi/2}\cos t \mathrm{d}t = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Donc $u_0 = 2(-1)^n(2n)!\dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2(-1)^n}{2n+1}$. /3

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \leqslant 2n,\ u_k = \langle U_n^{(k)}, U_n^{(2n-k)}\rangle = \frac{2^{2n+1}(n!)^2(-1)^{k+n}}{2n+1}}$$

(b) On a alors

$$\begin{aligned} \|L_n\|^2 &= \int_{-1}^{1}[L_n(t)]^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2^2n(n!)^2}\int_{-1}^{1}U_n^{(n)}U_n(n) = \frac{1}{2^2n(n!)^2}u_n \\ &= \frac{1}{2^2n(n!)^2}\times\frac{2^{2n+1}(n!)^2(-1)^{n+n}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

/1

$$\boxed{\|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}}$$

D. Application à l'approximation d'intégrales

Dans les questions suivantes, n désigne un entier naturel non nul.

1. Posons, pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, Q_k : « Il existe $t_{1,k} < t_{2,k} < \cdots < t_{2n-k,k}$ tel que pour tout $i \in [\![1, 2n-k]\!]$, $h^{(k)}(t_{i,k}) = 0$. ».
   — Par hypothèse, Q_0 est vérifié.
   — Soit $k \in [\![0, 2n-2]\!]$. Supposons que Q_k est vraie.
   Alors il existe $t_{1,k} < t_{2,k} < \cdots < t_{2n-k,k}$ tel que pour tout $i \in [\![1, 2n-k]\!]$, $h^{(k)}(t_{i,k}) = 0$ $h^{(k)}$ est dérivable, car h est de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$.
   Pour tout $i \in [\![1, 2n-k-1]\!]$, on peut appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[t_{i,k}, t_{i+1,k}]$.
   Donc il existe $t_{i,k+1} \in]t_{i,k}, t_{i+1,k}[$ tel que $h^{(k+1)}(t_{i,k+1}) = {h^{(k)}}'(t_{i,k+1}) = 0$.
   Etant sur des intervalles disjoints, les nombres $(t_{i,k+1})_{i\in\mathbb{N}_{2n-k-1}}$ sont différents.
   Et donc Q_{k+1} est vraie.

   Le raisonnement par récurrence est achevé. Et donc pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, Q_k est vraie.
   En particulier pour $k = 2n-1$: il existe $t_{1,2n-1}$ tel que $h^{(2n-1)}(t_{1,2n-1}) = 0$. /2

   $$\boxed{\text{Il existe un réel } c \text{ tel que : } h^{(2n-1)}(c) = 0.}$$

2. On note

   $$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

   et on rappelle que les $x_1, \dots, x_n$ désignent les racines de L_n et qu'elles sont deux à deux distinctes.

   (a) Il s'agit d'une application directe du cours, puisque ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange. /1

   $$\boxed{M_k = \prod_{j\neq k}\frac{X - x_j}{x_k - x_j}}$$

   On a : $\forall\ k \in \mathbb{N}_n, \forall\ i \in \mathbb{N}_n, \quad M_k(x_i) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$

   (b) On note, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_k = \Psi(M_k)$.

   Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on considère $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}P(x_k)M_k$.

   Alors $R(x_j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}P(x_k)M_k(x_j) = \sum_{k=0}^{n-1}P(x_k)\delta_{j,k} = P(x_j)$

   Donc x_0, x_1,...x_{n-1} sont des racines distinctes du polynôme $R - P$.
   Or $\deg R - P \leqslant \max(\deg R, \deg P) \leqslant n-1$.

Ainsi, $R-P$, admet plus de racines que son degré, donc $R-P=0$.

Par conséquent : $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(x_k)M_k$.

$$\Psi(P)=\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1} P(x_k)\int_{-1}^{1} M_k(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1} P(x_k)\Psi(M_k)$$

/2

$$\boxed{\forall\ P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\qquad \Psi(P)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k P(x_k)\qquad (1)}$$

3. Soit $P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.
En faisant la division euclidienne de P par L_n, on a $P=QL_n+R_n$,
avec $\deg R_n<\deg L_n=n$ et $\deg P=\deg L_n+\deg Q\leqslant 2n-1$, donc $\deg Q\leqslant n-1$.
On a alors :

$$\Psi(P)=\int_{-1}^{1} Q(t)L_n(t)\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1} R(t)\mathrm{d}t=\langle Q,L_n\rangle+\Psi(R)=0+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k R(x_k)$$

On a $\langle Q,L_n\rangle=0$, d'après C.4. (car $\deg Q<n$),
et par ailleurs $R(x_k)=P(x_k)-Q(x_k)L_n(x_k)=P(x_k)$ car x_k est une racine de L_n. /2,5

$$\boxed{\forall\ P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X],\qquad \Psi(P)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k R(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k P(x_k)}$$

4. On note $N_k=M_k^2$, où M_k est défini en 2.(a).
(a) M_k est de degré $n-1$, donc /0,5

$$\boxed{\deg(N_k)=2n-2}$$

(b) $N_k(x_j)=[\delta_{j,k}]^2=\delta_{j,k}$.
Par écriture de N_k^2, on voit que x_j est racine d'ordre 2 de N_k, donc x_j est racine de de N_k'. /1

$$\boxed{N_k(x_k)=1,\qquad N_k(x_j)=N_k'(x_j)=0}$$

(c) $N_k=\displaystyle\prod_{j\neq k}\frac{(X-x_j)^2}{(x_k-x_j)^2}$, donc

$$N_k'=\sum_{j\neq k}\left(\frac{2(X-x_j)}{(x_k-x_j)^2}\prod_{i\neq j,k}\frac{(X-x_i)^2}{(x_k-x_i)^2}\right)\Longrightarrow N_k'(x_k)=\sum_{j\neq k}\frac{2(x_k-x_j)}{(x_k-x_j)^2}\times 1$$

/2

$$\boxed{\alpha_k:=N_k'(x_k)=\sum_{j\neq k}\frac{2}{x_k-x_j}}$$

Dans la suite du problème, f désigne une application de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$.

5. On considère $H(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)+(X-x_k)(f'(x_k)-\alpha_k f(x_k))]\times N_k(X)$.
(a) Pour tout $k\in\mathbb{N}_n$, $\deg(f(x_k)+(X-x_k)(f'(x_k)-\alpha_k f(x_k))]\times N_k(X))=1+\deg N_k=2n-1$. /1

$$\boxed{\text{Donc } H(X)\in\mathbb{R}_{2n-1}[X].}$$

(b) $H(x_i)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)+(x_i-x_k)(f'(x_k)-\alpha_k f(x_k))]\times N_k(x_i)$.
Chaque terme de la somme est nul sauf pour $k=i$.
Donc $H(x_i)=[f(x_i)+(x_i-x_i)(f'(x_i)-\alpha_i f(x_i))]=f(x_i)$.

Et $H'=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}([(f'(x_k)-\alpha_k f(x_k))]N_k+[f(x_k)+(X-x_k)(f'(x_k)-\alpha_k f(x_k))]N_k')$.

$$\begin{aligned}H'(x_i)&=\sum_{k=1}^{n}([(f'(x_k)-\alpha_k f(x_k))]N_k(x_i)+[f(x_k)+(x_i-x_k)(f'(x_k)-\alpha_k f(x_k))]N_k'(x_i))\\&=[(f'(x_i)-\alpha_i f(x_i))]+[f(x_i)+(x_i-x_i)(f'(x_i)-\alpha_i f(x_i))]\alpha_i=f'(x_i)-\alpha_i f(x_i)+\alpha_i f(x_i)=f'(x_i)\end{aligned}$$

/2,5

$$\boxed{\forall\, i \in [\![1,n]\!], \qquad \begin{cases} H_n(x_i) = f(x_i) \\ H_n'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}}$$

6. Soit $x \in [-1,1]$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x \neq x_i$.
   Considérons $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) - H_n(t) - \dfrac{A_n(t)^2}{(2n)!}K$ avec $K = \dfrac{2n!}{A_n(x)}[f(x) - H_n(x)]$.
   K existe bien car $A_n(x) \neq 0$, puisque $x \neq x_i$.
   - $g(x) = f(x) - H_n(x) - \dfrac{A_n(x)}{2n!}K = f(x) - H(x) - 1[f(x) - H(x)] = 0$
   - Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $g(x_i) = [f(x_i) - H(x_i)] - \dfrac{A(x_i)^2}{2n!}K = 0$

   Ainsi g admet $n+1$ racines distinctes : $x, x_1, \dots x_n$.
   On ne sait pas où est x exactement. On ordonne ces $n+1$ racines en les notant $y_1, y_2, \dots y_{n+1}$
   En appliquant le théorème de Rolle sur chacun des n intervalles $[y_i, y_{i+1}]$,
   comme g est dérivable, il existe $z_i \in [y_i, y_{i+1}]$ tel que $g'(z_i) = 0$.
   Par ailleurs, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ et pour tout $t \in [-1,1]$ (par linéarité) :

$$g'(t) = f'(t) - H_n'(t) - f(t) - H_n(t) - 2\frac{A_n'(t)A_n(t)}{(2n)!}K$$

   Donc $g'(x_i) = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$.
   Ainsi g' est de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ avec $n+n$ racines distinctes : $x_1, \dots x_n$ et $z_1, \dots z_n$.
   On peut donc appliquer le résultat de la première question :
   il existe $c \in [y_1, y_{n+1}] \subset [-1,1]$ tel que $g^{(2n)}(c) = 0$.
   Or H est un polynôme de degré au plus $2n-1$, A est de degré $2n$ de coefficient 1,
   donc $H^{(2n)} = 0$ et $A^{(2n)} = (2n)!$. Donc par linéarité de la dérivation ($2n$ fois) :

$$g^{(2n)}(c) = 0 = f^{(2n)}(c) - K \Longrightarrow K = f^{(2n)}(c)$$

/4

$$\boxed{\exists\, c \in [-1,1]\ ,\ f(x) - H_n(x) = \frac{A_n(x)^2}{(2n)!}\, f^{(2n)}(c)}$$

7. Avec $y \notin \{x_1, \dots x_n\}$, on peut exploiter le résultat de la question précédente.
   Si $y = x_i$, alors $f(y) - H(y) = f(x_i) - H(x_i) = 0 = A_n(x_i) = A_n(y)$, on prend c quelconque. /1

$$\boxed{\forall\, y \in [-1,1]\ ,\ \exists\, c_y \in [-1,1]\ ,\ f(y) - H_n(y) = \frac{A_n(y)^2}{(2n)!}\, f^{(2n)}(c_y)}$$

8. $f^{(2n)}$ est continue sur le segment $[-1,1]$ (car f est de classe $\mathcal{C}^{2n}$).
   On applique le théorème de Weierstrass : $f^{(2n)}$ est bornée sur $[-1,1]$ et atteint ses bornes.
   Il existe $r \in [-1,1]$ tel que $\forall\, t \in [-1,1]$, $f^{(2n)}(t) \leqslant f^{(2n)}(r)$. /1

$$\boxed{\text{D'où l'existence de } M_{2n}.}$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - \big(\alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)\big) = \Psi(f) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k H(x_k) = \Psi(f) - \Psi(H)$$

   car $f(x_i) = H(x_i)$ et $H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, en exploitant le résultat de 3.
   Puis Ψ est linéaire : /2

$$\boxed{\left|\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)\right| = |\Psi(f-H)| \leqslant \frac{1}{(2n)!}\int_{-1}^{1} |A_n(y)^2 f^{(2n)}(c_y)|\mathrm{d}y \leqslant \frac{M_{2n}}{(2n)!}\Psi(A_n^2)}$$

9. On exploite le dernier résultat de la partie C.

$$\int_{-1}^{1} A_n(t)^2\mathrm{d}t = \langle \frac{1}{a_n}L_n, \frac{1}{a_n}L_n \rangle = \frac{1}{a_n^2}\|L_n\|^2 = \left(\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}\right)^2 \frac{2}{2n+1}$$

   Or, d'après la formule de Stirling :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

/2

$$\boxed{\int_{-1}^{1} A_n(t)^2\mathrm{d}t \sim \frac{\pi n}{2^{2n}}\frac{2}{2n+1} \sim \frac{\pi}{2^{2n}}}$$