

Devoir à la maison n°8

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**.

Exercice - Espace vectoriel de matrices

On note $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

On notera simplement : $A = M(0, 1)$ et $I = M(1, 0)$.

Enfin, on note $\mathcal{F} = \{M(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

1. (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On pourra montrer que $\mathcal{F} = \text{vect}(A, I)$.
- (b) Montrer que $\mathcal{F}$ est de dimension 2.
- (c) Écrire la matrice des composantes de $((A + I), (A - 2I))$ dans la base (A, I) de $\mathcal{F}$.
- (d) Montrer que $((A + I), (A - 2I))$ est une base de $\mathcal{F}$.
- (e) Calculer les coordonnées de $M(a, b)$ dans cette base.
2. (a) Calculer le produit $(A + I) \times (A - 2I)$.
- (b) Calculer $(A + I)^2$. Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(A + I)^{n+1} = 3 \times (A + I)^n$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(A + I)^n$ s'écrit simplement.
- (c) Calculer $(A - 2I)^2$. Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(A - 2I)^{n+1} = -3 \times (A - 2I)^n$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(A - 2I)^n$ s'écrit simplement.
- (d) Écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $[M(a, b)]^n$ dans cette base.
3. En déduire en particulier une forme simple de A^n (pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$)

Problème - Deux espaces de matrices

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A \times M = M\}$$

$$E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2 \times M = AM\}$$

Partie I : Structure

1. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On admettra que $E_2(A)$ est également un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. (a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.
(b) Montrer que si A est inversible alors $E_1(A) = E_2(A)$.
4. (a) Établir que si $A - I$ est inversible alors $E_1(A) = \{0\}$
(b) Un exemple : $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie II : Étude d'un cas particulier

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}CP$ est une matrice diagonale.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.
Montrer l'équivalence suivante : $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$.

4. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b et c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
6. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$.
Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?