Devoir à la maison n°7
CORRECTION

Exercice - Développement limité

1. On sait qu'au voisinage de 0 :
$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7)$ et
$e^{-x} \underset{0}{=} 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7)$
Donc $e^x + e^{-x} \underset{0}{=} 2 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{360}x^6 + o(x^7)$ et $e^x - e^{-x} \underset{0}{=} 2x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{2520}x^7 + o(x^7)$.
Pour le dénominateur, on met la partie principale en facteur :
$e^x - e^{-x} \underset{0}{=} 2x\left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{5040}x^6 + o(x^6)\right)$,
$$\begin{aligned}
\coth(x) &= \frac{1}{2x}\left(2 + x^2 + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{360}x^6 + o(x^6)\right)\left(1 - \left[\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 + \tfrac{1}{5040}x^6\right] + \left[\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4\right]^2 - \left[\tfrac{1}{6}x^2\right]^3 + o(x^6)\right)\\
&= \frac{1}{2x}\left(2 + x^2 + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{360}x^6 + o(x^6)\right)\left(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \left(-\tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{36}\right)x^4 + \left(-\tfrac{1}{5040} + \tfrac{1}{360} - \tfrac{1}{216}\right)x^6 + o(x^6)\right)\\
&= \frac{1}{2x}\left(2 + x^2 + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{360}x^6 + o(x^6)\right)\left(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{7}{360}x^4 - \tfrac{31}{15120}x^6 + o(x^6)\right)\\
&= \frac{1}{2x}\left(2 + (1 - \tfrac{1}{3})x^2 + (\tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{7}{180})x^4 + \left(-\tfrac{31}{7560} + \tfrac{7}{360} - \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{360}\right)x^6 + o(x^6)\right)
\end{aligned}$$
$$\boxed{\coth(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 + o(x^5)}$$

2. Par intégration du DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, en 0, on a :
$\arctan(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$ et $\sin \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$.
En factorisant par x : $\dfrac{\arctan x}{\sin x} \underset{0}{=} \dfrac{1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + o(x^4)}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)}$.
On applique les propriétés du logarithme :
$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\arctan(x)}{\sin(x)}\right) &\underset{0}{=} \ln(1 - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{5}x^4 + o(x^4)) - \ln(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 + o(x^4))\\
&\underset{0}{=} [-\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{5}x^4] - \tfrac{1}{2}[-\tfrac{1}{3}x^2]^2 + o(x^4) - [-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4] + \tfrac{1}{2}[-\tfrac{1}{6}x^2]^2 + o(x^4)\\
&\underset{0}{=} -\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{3}{20}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$
Puis $\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc
$$f(x) \underset{0}{=} -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{20}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{15}x^4 + o(x^4)$$
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{15}x^4}$$

3. En $+\infty$, $\arctan(x) \to \frac{\pi}{2}$. $\arctan(x) - \frac{\pi}{2} = \arg(1+ix) - \arg(i) = \arg\frac{1+ix}{i} = \arg(x-i) = \arctan\frac{-1}{x}$
Donc $x\arctan x - x\frac{\pi}{2} \underset{x\to+\infty}{=} x\left(\frac{-1}{x} - \frac{1}{3}\frac{-1}{x^3} + o(\frac{1}{x^3})\right) \underset{x\to+\infty}{=} -1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.
$\ln(\frac{x+1}{x}) = \ln(1 + \frac{1}{x}) \underset{x\to\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x})$.
Puis $e^{-x} \to 0$, pour $x \to +\infty$.
Et finalement, comme pour tout $\alpha > 0$, $x^\alpha e^{-x} \to 0$ $(x \to \infty)$ $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \times \exp(-x) = o(\frac{1}{x^\alpha})$.
Donc
$$g(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{1}{3x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$
$$\boxed{\mathcal{C}_g \text{ admet pour asymptote } \Delta\text{, d'équation } y = \frac{\pi}{2}x - 1.\ \mathcal{C}_g \text{ est au-dessus de } \Delta}$$

Problème - Approximation uniforme par des polynômes

1. Quelques calculs préliminaires.
   Dans cette partie x est un nombre réel et n est un entier naturel, $n \geqslant 1$.

   (a) On applique la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1^n = 1}$$

   (b) Notons que pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$k\binom{n}{k} = \frac{n!k}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

   Puis, on applique le binôme de Newton (la somme commence à 1, sinon on multiplie par 0) :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)} = nx(x+(1-x))^{n-1} = nx}$$

   (c) Même idée : pour $2 \leqslant k \leqslant n$,

$$k(k-1)\binom{n}{k} = \frac{n!k(k-1)}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

   Puis, on applique le binôme de Newton (la somme commençant à 2, sinon on multiplie par 0) :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} x^{k-2}(1-x)^{(n-2)-(k-2)} = n(n-1)x^2(x+(1-x))^{n-2}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2}$$

   (d) On exploite la décomposition en combinaison linéaire :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left(x^2 - 2\frac{k}{n}x + \frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

   On exploite aussi le fait que $k^2 = k(k-1)+k$, et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \left(-\frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^k(1-x)^{n-k} \\ &= x^2 - 2x^2 + \frac{1}{n}x + \frac{n-1}{n}x^2 = \frac{-n+n-1)x^2 + x}{n} = \frac{x-x^2}{n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}}$$

2. Étude de $S(x)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. Le but de cette sous-partie est de majorer la somme

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

   (a) Majoration de $S(x)$: première méthode.

      i. Comme $k \in S_V$, on a la majoration $\left|x-\frac{k}{n}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc

$$S_V(x) = \sum_{k\in V}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sum_{k\in V}\frac{1}{\sqrt{n}}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\in V}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

En ajoutant des termes positifs :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\in V}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{n}}(x+(1-x))^n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par transitivité : $\boxed{\forall\, x \in [0,1], \quad S_V(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}}$

ii. $k \in W \iff \left|x-\frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}} \implies \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 = \left|x-\frac{k}{n}\right|^2 > \frac{1}{\sqrt{n}}\left|x-\frac{k}{n}\right|.$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}S_W(x) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\in W}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} < \sum_{k\in W}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}\end{aligned}$$

d'après la question 1.(d). Et ainsi

$$\boxed{\forall\, x \in [0,1], \quad S_W(x) \leqslant \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}}$$

iii. Soit $f : x \mapsto x(1-x) = x - x^2$, les variations de f sont classiques (polynôme) :
- f est croissante de $]-\infty, \frac{1}{2}]$ sur $]-\infty, \frac{1}{4}]$
- f est décroissante de $[\frac{1}{2}, +\infty[$ sur $[\frac{1}{4}, +\infty[$

Comme $f(0) = f(1) = 0$, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{4}$.
Donc

$$\boxed{S(x) = S_V(x) + S_W(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{5}{4\sqrt{n}}}$$

(b) Majoration de $S(x)$: seconde méthode (Cauchy-Schwartz). On rappelle que pour tout $(a_0, a_1, \dots a_n)$, $(b_0, \dots b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \times \sum_{k=0}^{n} b_k^2$$

En prenant $a_k = \left|x-\frac{k}{n}\right|\sqrt{\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}$ et $b_k = \sqrt{\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}$.
On trouve :

$$[S(x)]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \times \sum_{k=0}^{n} b_k^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \times \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$[S(x)]^2 \leqslant \frac{x(1-x)}{n} \times 1$$

On exploite un encadrement vu plus haut : pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
Donc $[S(x)]^2 \leqslant \frac{1}{4n}$:

$$\boxed{S(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

3. Application à l'approximation uniforme.
Dans cette partie, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $f \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième polynôme de Bernstein de f, notée $B_n(f)$ en posant pour tout $x \in [0,1]$,

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$$

Le but de cette partie est d'étudier $\sup_{x\in[0,1]}|B_n(f)(x) - f(x)|$ lorsque f est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant une hypothèse additionnelle.

(a) Dans ce cas, $f(\frac{k}{n}) = \frac{k^2}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}(k(k-1)+k)$, le calcul a été réalisé explicitement :

$$B_n(f)(x) = \frac{1}{n^2}(n(n-1)x^2 + nx) = x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2)$$

$$\boxed{\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \times \sup_{x\in[0,1]} |x(1-x)| = \frac{1}{4n}}$$

d'après quelques calculs faits plus tôt.

(b) Soit $f \in \mathcal{C}$, comme pour tout x, $f(x) = f(x) \times 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$,

on a pour tout $x \in [0,1]$, par linéarité de la sommation :

$$\boxed{B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}}$$

(c) i. Supposons que f soit δ-lipschitzienne, donc

$$\forall\ x, x' \in [0,1], |f(x) - f(x')| \leqslant \delta|x - x'|$$

Donc, par inégalité triangulaire pour commencer, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}|B_n(f)(x) - f(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \binom{n}{k} |x^k||(1-x)^{n-k}| = \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \delta \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \delta S(x)\end{aligned}$$

En prenant la borne supérieure (avec la réponse de la question 2.(b)) :

$$\boxed{\text{si } f \text{ est } \delta\text{-lipschitzienne, alors } \sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{n}} \text{ pour tout entier } n \geqslant 1.}$$

ii. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, alors f' est continue sur $[0,1]$,
et donc, d'après la théorème de Weierstrass, il existe c tel que $\forall\ x \in [0,1]$, $f'(x) \leqslant c$.
Puis, on applique l'inégalité des accroissements finis et donc f est c-lipschitzienne.
Et d'après la question précédente :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}.}$$

iii. Supposons maintenant que f est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux,
Alors il existe $\sigma = (x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_m = 1)$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}_m$,
- $f_{|]x_{i-1},x_i[}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$,
- $f_{|]x_{i-1},x_i[}$ admet un $\mathcal{C}^1$-prolongement par continuité sur $[x_{i-1}, x_i]$, notée $\overline{f_i}$.

On peut alors appliquer le résultat précédent à chaque $\overline{f_i}$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment).
Il existe donc, pour $i \in \mathbb{N}_m$, c_i tel que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |B_n(\overline{f}_i)(x) - \overline{f_i}(x)| \leqslant \dfrac{c_i}{\sqrt{n}}$

Et comme pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $\overline{f_i}(x) = f_{|]x_{i-1},x_i[}(x) = f(x)$, on a donc

$$\forall\ i \in \mathbb{N}_m, \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sup_{x\in]x_{i-1},x_i[} |B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{c_i}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\overbrace{c}^{=\max(c_i)}}{\sqrt{n}}$$

Puis comme f est continue sur $[0,1]$, on peut considérer également $x = x_i$:

$$\boxed{\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}}$$

(d) Soit $f : [0,1] \Rightarrow \mathbb{R}$, continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Soit $r > 0$; avec les mêmes notations, on considère $c = \max_{i\in\mathbb{N}_m}(\sup \overline{f_i})$ puis $N = \lfloor \left(\frac{c}{r}\right)^2 \rfloor + 1$.
Puis $P = B_N(f)$, on a alors

$$\boxed{\forall\ x \in [0,1],\ |P(x) - f(x)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{N}} \leqslant r.}$$