MPSI 3 - Fermat Le 12.01.19
2018-2019

Devoir surveillé n°5

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole ($*$) voire ($**$).
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice - Un air de « déjà-vu »

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.

1. Montrer qu'il existe c tel que $f'(c) = 0$.
2. En déduire que si g est une fonction dérivable sur I alors $g'(I)$ est un intervalle.
3. Donner l'exemple d'une fonction non continue qui vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. (On montrera que cette fonction est bien non continue).

Problème - Caractères de Dirichlet

Notations :

— Pour deux nombres entiers relatifs a et b, on note $a \wedge b$ le PGCD de ces deux nombres.
— On note $\mathcal{P}$, l'ensemble des nombres premiers.
— Pour deux nombres entiers relatifs, on note $a\%b$, le reste de la division euclidienne de a par b.
Nécessairement : $b|(a - a\%b)$ et $0 \leqslant a\%b < b$
— Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_N$, l'ensemble des nombres entiers de $[\![1, N]\!]$, premier avec N.

$$\mathcal{P}_N = \{a \in [\![1, N]\!] \mid a \wedge N = 1\}$$

— Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(N)$, le nombre d'entiers de $[\![1, N]\!]$, premier avec N :

$$\varphi(N) = \operatorname{card} \mathcal{P}_N$$

L'application $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, $N \mapsto \varphi(N)$ est appelé indicatrice d'Euler.
— Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on suppose qu'il existe une application χ_N de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait :

A. $\chi_N(0) = 0$ et χ_N est non identiquement nul.

B. Pour tout a dans $\mathbb{Z}$, non premier avec N, $\chi_N(a) = 0$.

C. Pour tous entiers relatifs a et b, $\chi_N(ab) = \chi_N(a)\chi_N(b)$
On dit que χ_N est complétement multiplicative

D. χ_N est N-périodique : pour tout a dans $\mathbb{Z}$, $\chi_N(a + N) = \chi_N(a)$

S'il n'y a pas de doute sur le nombre N considéré, il est possible d'écrire χ au lieu de χ_N.
Une telle application s'appelle *un caractère de Dirichlet*.

Objectif :
Dans ce problème, conformément à la demande de Rémy D., nous démontrons quelques étapes du *théorème de Dirichlet (1840)* :

Pour tout nombre $a, n \in \mathbb{N}$ tel que $a \wedge n = 1$, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $a + kn$ $\forall\ a, n \in \mathbb{N}, \quad a \wedge n = 1 \iff \operatorname{card}\{p \in \mathcal{P} \mid p \equiv a[n]\} = +\infty$

La démonstration complète est trop longue. Nous nous contenterons de résultats intermédiaires :
— en partie A, on étudie la fonction φ (indicatrice d'Euler) et nous terminons par un théorème d'Euler qui généralise le petit théorème de Fermat.

— en partie B, on étudie la fonction arctan ce qui nous permet d'obtenir la valeur de la limite d'une certaine suite (série).
— en partie C, on étudie quelques caractères particuliers.
— en partie D, on montre la convergence d'une certaine suite, premiers pas vers le théorème de Dirichlet.

Les deux premières parties sont indépendantes. La partie C dépend de la partie B. La partie D dépend des parties A et C.
Dans la correction figurent des commentaires complémentaires...

A - Indicatrice d'Euler

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(N) \geqslant 1$.
   Donner tous les entiers pour lesquels $\varphi(N) = 1$.
2. Si p est un nombre premier, que vaut $\varphi(p)$?
   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$.
3. (a) Montrer que
$$P: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{N_1N_2} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{N_1} \times \mathcal{P}_{N_2} \\ a & \longmapsto & (a\%N_1, a\%N_2) \end{array}$$
   est bien définie (On vérifiera que l'ensemble d'arrivée annoncé est correct).
   (b) (*) Montrer que, si N_1 et N_2 sont premiers entre eux, P est bijective de $\mathcal{P}_{N_1N_2}$ sur $\mathcal{P}_{N_1} \times \mathcal{P}_{N_2}$.
   En déduire que φ est une application multiplicative, c'est-à-dire vérifiant :
$$\forall\, N_1, N_2 \in \mathbb{N}, \qquad N_1 \wedge N_2 = 1 \Longrightarrow \varphi(N_1N_2) = \varphi(N_1)\varphi(N_2)$$
4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathcal{P}_N$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathcal{P}_N$, $(ak)\%N \in \mathcal{P}_N$
   (b) On définit alors :
$$\psi_a : \mathcal{P}_N \to \mathcal{P}_N,\ k \mapsto (ak)\%N$$
   Montrer que ψ_a est bijective.
   (c) En déduire le théorème d'Euler (généralisation du petit théorème de Fermat) :
$$\forall\, a \in \mathbb{N}, \qquad a \wedge N = 1 \Longrightarrow a^{\varphi(N)} \equiv 1[N]$$

B - Etude de arctan

On étudie ici la fonction arctan, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (résultat du cours).
On note également ici :
$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \frac{1}{1-ix}$$

1. Montrer que A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une expression de $A^{(k)}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (à démontrer).
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \mathrm{Re}(A(x))$.
   En déduire une expression de $\arctan^{(k+1)}(0)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, il existe $c_x \in]0,x[$ tel que
$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\arctan^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\arctan^{N+1}(c_x)}{(N+1)!} x^{N+1}$$
   On pourra considérer, x fixé, l'application $h_N : t \mapsto \arctan(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{\arctan^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - R_N \frac{(x-t)^{N+1}}{(N+1)!}$
   avec R_N choisit tel que $h_N(0) = 0$.
   (b) En déduire qu'il existe $c_1 \in]0,1[$ tel que
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{1}{2p+1} \mathrm{Re}\left(\frac{i^{2p}}{(1-ic_1)^{2p+1}}\right)$$
   (c) Quelle est la limite de $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

C. Caractères. Cas particuliers

1. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, calculer $\chi_N(1)$.
2. Montrer que si $a \wedge N \neq 1$, alors $\{p \in \mathcal{P} \mid p \equiv a[N]\}$ contient au plus un élément.
   En déduire que $\{p \in \mathcal{P} \mid p \equiv a[N]\} = +\infty \Longrightarrow \chi_N(a) \neq 0$.
3. En supposant $N = 2$, déterminer χ_2.
4. On suppose dans cette question que $N = 4$.
   (a) Montrer que $\chi_4(3)$ ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1.
   (b) On suppose maintenant $\chi_4(3) = -1$.
   On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\chi_4(k)}{k}$.
   Montrer la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer la valeur de sa limite, notée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_4(n)}{n}$.
5. (a) Montrer que s'il existe $a \in \mathcal{P}_N$ tel que $\{(a^k)\%N, k \in [\![1, \varphi(N)]\!]\} = \mathcal{P}_N$, alors

$$\chi_N^a : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \wedge N \neq 1 \\ \exp(2i\pi \frac{k_t}{\varphi(N)}) & \text{avec } t \equiv (a^{k_t})[N] \end{cases}$$

   est un caractère de Dirichlet.
   (b) Montrer que χ_N^a vérifie également le critère suivant :
   E. Il existe un entier $r \in \mathbb{Z}$ tel que $\chi_N^a(r) \notin \{0, 1\}$
   (c) Proposer un caractère de Dirichlet vérifiant également **E** pour $N = 6$.
   Et un autre pour $N = 7$.

D. Convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n}$

Soit $N \in \mathbb{N}$, fixé. Pour la suite de cette partie, la fonction χ_N sera simplement notée χ.

On note pour toute cette partie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \chi(k)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}$

1. Soit $a \in \mathcal{P}_N$.
   En exploitant le théorème d'Euler (A.4.c.), montrer que $|\chi(a)| = 1$.
   Plus précisément, montrer que $\chi(a)$ est une racine r-ième de l'unité. On donnera une expression de r, en fonction de N.
2. Établir l'identité :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$$

On suppose dorénavant qu'il existe $a \in \mathcal{P}_N$ vérifiant $\chi(a) \neq 1$ (critère **E**).

3. Pour tout entier h, calculer $\displaystyle\sum_{k=hN}^{(h+1)N-1} \chi(k)$.
   On pourra commencer par le cas $h = 0$ puis exploiter la N-périodicité de χ.
4. Montrer, pour tout $m > 0$, l'inégalité :

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leqslant \varphi(N)$$

5. (a) On rappelle qu'on dit qu'une suite (u_n) vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ q > p \geqslant n,\ |u_q - u_p| < \epsilon$$

   Sans démonstration, rappeler la relation entre « (u_n) converge » et « (u_n) vérifie le critère de Cauchy »(on supposera que la suite (u_n) est à valeurs réelles).
   (b) Démontrer que le résultat énoncé précédemment reste vraie pour (u_n) à valeurs complexes.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $q > p \geqslant n$,

$$\sum_{k=p}^{q} \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k=p}^{q-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_q}{q} - \frac{S_{p-1}}{p}$$

   (d) En déduire que (T_n) vérifie le critère de Cauchy.
   (e) Conclure quant à la convergence de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}\right)_{n\geqslant 1}$.