

Devoir à la maison n°7

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**.

Exercice - Développement limité

- Donner le développement limité (généralisé) d'ordre 5 au voisinage de 0 de $\coth : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.
- Donner un équivalent de $f(x) = \ln\left(\frac{\arctan(x)}{\sin(x)}\right) + \frac{x^2}{6} \cos(x)$ pour $x \rightarrow 0$.
- Montrer que la courbe représentative de $g : x \mapsto x \arctan(x) + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \times \exp(-x)$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$.
On donnera l'équation de cette asymptote Δ et la position relative de la courbe \mathcal{C} par rapport à Δ .

Problème - Approximation uniforme par des polynômes

- Quelques calculs préliminaires.
Dans cette partie x est un nombre réel et n est un entier naturel, $n \geq 1$.
 - Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.
 - Montrer que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
 - Montrer que $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$.
 - Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

- Étude de $S(x)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. Le but de cette sous-partie est de majorer la somme

$$S(x) = \sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- Majoration de $S(x)$: première méthode.

On note

- V , l'ensemble des entiers $k \in \{0, \dots, n\}$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- W , l'ensemble des entiers $k \in \{0, \dots, n\}$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Et on pose $S_V(x) = \sum_{k \in V} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ et $S_W(x) = \sum_{k \in W} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

- Montrer que $S_V(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- Montrer que $S_W(x) \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.
- Montrer que $S(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}$.

- (b) Majoration de $S(x)$: seconde méthode (Cauchy-Schwartz). On rappelle que pour tout $(a_0, a_1, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=0}^n a_k^2 \times \sum_{k=0}^n b_k^2$$

A l'aide de la question 1.(d), en déduire que $S(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

3. Application à l'approximation uniforme.

Dans cette partie, on note \mathcal{C} l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

Pour $f \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n -ième polynôme de Bernstein de f , notée $B_n(f)$ en posant pour tout $x \in [0, 1]$,

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

Le but de cette partie est d'étudier $\sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)|$ lorsque f est un élément de \mathcal{C} vérifiant une hypothèse additionnelle.

- (a) Un exemple.

Si $f(x) = x^2$, pour tout $x \in [0, 1]$, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $B_n(f)$ et en déduire la valeur de $\sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)|$.

- (b) Soit $f \in \mathcal{C}$, montrer pour tout $x \in [0, 1]$, la relation

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- (c) i. Montrer que si f est δ -lipschitzienne, alors

$$\sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{n}} \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$

- ii. En déduire que si f est de classe \mathcal{C}^1 , alors il existe un réel c tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$.

iii. Étendre le résultat au cas où f est une fonction continue, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

- (d) Soit $f : [0, 1] \Rightarrow \mathbb{R}$, continue, \mathcal{C}^1 par morceaux.

Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $r > 0$, il existe une polynôme P à coefficients réels tel que $\forall x \in [0, 1], f(x) - r \leq P(x) \leq f(x) + r$.