Devoir à la maison n°6
CORRECTION

Exercice - Théorème de Heine

Soit $\epsilon > 0$.

1. Soit $x \in [a,b]$. f est continue en x.

$$\exists\ \eta_\epsilon > 0 \mid \forall\ y \in [a,b], |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$$

Donc $\Delta_\epsilon(x) = \{\eta_\epsilon > 0 \mid \forall\ y \in [a,b], |x-y| \leqslant \eta_\epsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon\}$ est non vide, dans $\mathbb{R}$.
Δ est majorée par $\max(b-x, x-a)$. Donc $\Delta_\epsilon(x)$ admet une borne supérieure.
On note $\delta(x) = \sup \Delta_\epsilon(x)$. Nécessairement, $\delta(x) > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^* \text{ tel que : } \forall\ x \in [a,b], \forall\ y \in [a,b], |x-y| \leqslant \delta(x) \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon}$$

On note pour tout $x \in [a,b]$, $\delta(x) = \sup\{\delta \in]0, b-a] \mid \forall\ y \in [a,b], |y-x| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon\}$.

2. Pour tout $x \in [c,d]$ (donc $x \in [a,b]$), $\delta(x) > 0$, d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Ainsi } \delta_{[c,d]} := \inf_{x\in[c,d]} \delta(x) \geqslant 0}$$

3. Supposons que $\mathcal{P}_{[c,d]}$ et $\mathcal{P}_{[d,e]}$ sont vraies. Donc $\delta_{[c,d]} > 0$ et $\delta_{[d,e]} > 0$. Or :

$$\delta_{[c,e]} = \inf_{x\in[c,e]} \delta(x) = \min\big(\inf_{x\in[c,d]} \delta(x), \inf_{x\in[d,e]} \delta(x)\big) = \min(\delta_{[c,d]}, \delta_{[d,e]}) > 0$$

Ainsi $\mathcal{P}_{[c,e]}$ est vraie.

$$\boxed{\mathcal{P}_{[c,d]} \text{ et } \mathcal{P}_{[d,e]} \Longrightarrow \mathcal{P}_{[c,e]}}$$

Remarques !
On a exploité ici : $\inf_{x\in A\cup B} f(x) = \min(\inf_{x\in A} f(x), \inf_{x\in B} f(x))$.
Rappelons la démonstration :
$\forall\ x \in A\cup B$, $x \in A$ *et donc* $f(x) \geqslant \inf_{x\in A} f(x)$ *ou* $x \in B$ *et donc* $f(x) \geqslant \inf_{x\in B} f(x)$.
Dans tous les cas : $f(x) \geqslant \min(\inf_{x\in A} f(x), \inf_{x\in B} f(x))$.
Ainsi, $\min(\inf_{x\in A} f(x), \inf_{x\in B} f(x))$ *est un minorant de* $\{f(x), x \in A\cup B\}$.
Par ailleurs, pour tout $\epsilon > 0$,
il existe $x_1 \in A$ *tel que* $\inf_{x\in A} f(x) > f(x_1) - \epsilon$ *et il existe* $x_2 \in B$ *tel que* $\inf_{x\in B} f(x) > f(x_2) - \epsilon$.
donc il existe $x_0 \in A\cup B$ *tel que* $\min(\inf_{x\in A} f(x), \inf_{x\in B} f(x)) > f(x_0) - \epsilon$
($x_0 = x_1$, *si* $\min(\inf_{x\in A} f(x), \inf_{x\in B} f(x)) = \inf_{x\in A} f(x)$ *et* $x_0 = x_2$, *sinon).*
Donc $\inf_{x\in A\cup B} f(x) = \min(\inf_{x\in A} f(x), \inf_{x\in B} f(x))$

4. Supposons que $\delta_{[a,b]} = 0$, alors d'après le principe de dichotomie,
il existe une suite (I_n) de segments emboités avec $\ell(I_n) \to 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{I_n}$ faux.
On note $\{\ell\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. f est continue en ℓ. On considère $\alpha = \eta_{\epsilon/2}(\ell) > 0$.

$$\forall\ y \in [a,b], |y-\ell| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(y)-f(\ell)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Donc, pour tout $x, y \in]\ell-\alpha, \ell+\alpha[$, $|x-\ell| < \alpha$, $|y-\ell| < \alpha$ et par l'inégalité triangulaire :

$$|f(x)-f(y)| < |f(x)-f(\ell)| + |f(y)-f(\ell)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Par ailleurs, comme $(I_n) \to \{\ell\}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $I_N \subset]\ell - \frac{\alpha}{2}, \ell + \frac{\alpha}{2}[$.
Et $\forall\ x \in I_N \subset]\ell-\alpha, \ell+\alpha[$, $\forall\ y \in]\ell-\alpha, \ell+\alpha[$, $|f(x)-f(y)| < \epsilon$
Or $\forall\ y \in [a,b]$, tel que $|x-y| < \frac{\alpha}{2}$, $y \in]x-\frac{\alpha}{2}, x+\frac{\alpha}{2}[\subset]\ell - 2\frac{\alpha}{2}, \ell + 2\frac{\alpha}{2}[$, donc $|f(x)-f(y)| < \epsilon$.
Donc $\delta(x) \geqslant \frac{\alpha}{2}$. Ceci est vrai pour tout $x \in I_N$
Donc $\mathcal{P}_{I_N}$ est vraie. On a donc une contradiction

$$\boxed{\text{Par l'absurde : } \delta_{[a,b]} > 0.}$$

5. En considérant $\delta_{[a,b]} > 0$, on peut affirmer :

$$\forall\, x, y \in [a,b], |x-y| < \delta_{[a,b]} \leqslant \delta(x) \Longleftrightarrow |f(x - f(y)| < \epsilon$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est uniformément continue sur } [a,b]}$$

Remarques !

Plus généralement, on considère une propriété $\mathcal{P}$.
On suppose que si :
- $\forall\, [c,d], [d,e] \subset [a,b]$, $\mathcal{P}_{[c,d]}$ *et* $\mathcal{P}_{[d,e]} \Longrightarrow \mathcal{P}_{[c,e]}$
- *Pour tout* $x \in [a,b]$, $\mathcal{P}$ *est vraie sur un voisinage de* x

Alors $\mathcal{P}$ *sur* $[a,b]$ *entièrement.*

En effet, d'après le principe de dichotomie, si $\mathcal{P}$ *sur* $[a,b]$ *est faux, il existe une suite* (I_n) *de segments emboités avec* $\ell(I_n) \to 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{I_n}$ *faux. On note* $\{\ell\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Or $\mathcal{P}$ *est vraie au voisinage de* ℓ *(puisque vraie au voisinage de tout* x*).*
Ainsi, il existe $\alpha > 0$ *tel que* $\mathcal{P}_{]\ell-\alpha,\ell+\alpha[}$ *est vraie. Et il existe également* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $I_N \subset]\ell-\alpha, \ell+\alpha[$.
On a une contradiction et donc $\mathcal{P}_{[a,b]}$ *n'est pas faux, donc est vraie.*

Problème - Fonction à variation lente

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est à variation lente si :

$$\forall\, c > 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$$

1. (a) Soit $c > 0$, pour tout $x > 0$, par addition des limites :

$$\frac{\ln(cx)}{\ln(x)} = \frac{\ln c + \ln x}{\ln x} = 1 + \frac{\ln c}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0$$

$$\boxed{\text{Donc la fonction ln est à variation lente.}}$$

(b) Soit $c > 0$, pour tout $x > 0$, par division des limites :

$$\frac{f(cx)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1$$

$$\boxed{\text{Donc s'il existe } \ell \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } f(x) \to \ell \text{ lorsque } x \to +\infty,\ f \text{ est à variation lente.}}$$

(c) Non. On peut considérer $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, on a bien $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
Et pour tout $c > 0$, $x > 0$,

$$\frac{f(cx)}{f(x)} = \frac{x}{cx} = \frac{1}{c} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{c}$$

$$\boxed{\text{Si } f(x) \to 0 \text{ lorsque } x \to +\infty, \text{ on n'a pas nécessairement } f \text{ à variation lente.}}$$

2. On fixe $a > 0$ et une fonction continue $h = [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $h(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad f(x) = a \exp\left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} \mathrm{d}u\right) \qquad (*)$$

Cette expression est dérivable et comme la dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_2^x \frac{h(u)}{u} \mathrm{d}u$ est $x \mapsto \dfrac{h(x)}{x}$:

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad f'(x) = a\frac{h(x)}{x} \exp\left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} \mathrm{d}u\right) = \frac{h(x)}{x} f(x)$$

$$\boxed{\forall\, x \geqslant 0, \qquad h(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}}$$

3. (a) On exploite la formule de la question précédente. Considérons :

$$h : x \mapsto \frac{x\ln'(x)}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln x}$$

définie pour $x > 1$, donc pour $x \geqslant 2$.
On a alors

$$\int_2^x \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u = \int_2^x \frac{1}{u\ln u}\mathrm{d}u = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$$

Donc

$$a\exp\left(\int_2^x \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u\right) = a\frac{\exp(\ln(\ln x))}{\exp(\ln(\ln 2))} = a\frac{\ln x}{\ln 2}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall\, x \geqslant 2, \ln(x) = a\exp\left(\int_2^x \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u\right),\ \text{avec } a = \ln 2 \text{ et } h : x \mapsto \frac{1}{\ln x}}$$

On vérifie bien que $a > 0$ et $h : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $h(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

(b) h n'est pas définie en 1.
Sur $]1, +\infty[$, le calcul se fait sans aucun problème :

$$\boxed{\text{L'égalité précédente peut être prolonger sur }]1,2]}$$

Remarques !
Avec le cours de seconde année, on peut prolonger f en 1 (mais pas plus) car $\ln(\ln x)$ admet une limite égale à $-\infty$ et donc $\exp(\ln(\ln(x)))$ admet une limite nulle en 1, par composition.
Au delà c'est impossible : on aurait des logarithmes de nombres négatifs.

4. On revient au cas d'une fonction f général de la forme $(*)$ donnée en question 2.

(a) Soit $\epsilon > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, M > 0, \forall\, x \geqslant M, |h(x)| \leqslant M$$

Donc, avce la relation de Chasles :

$$\int_2^x \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u = \int_2^M \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u + \int_M^x \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u$$

$$\left|\int_2^x \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant C_1 + \int_M^x \frac{\epsilon}{u}\mathrm{d}u = C_1 + \epsilon(\ln(x) - \ln M)$$

où $C_1 = \displaystyle\int_2^M \left|\frac{h(u)}{u}\right| du$ est une constante. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}+$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant a\exp\left|\int_2^x \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{ae^{C_1}}{M^\epsilon}x^\epsilon$$

Donc il existe $C = \dfrac{ae^{C_1}}{M^\epsilon} > 0$, constante (par rapport à x) telle que : $\forall\, x \geqslant 2,\ f(x) \leqslant Cx^\epsilon$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \epsilon > 0 \text{ fixé, il existe une constante } C > 0 \text{ telle que } f(x) \leqslant Cx^\epsilon \text{ pour tout } x \geqslant 2}$$

(b) Soit $c \geqslant 1$. Soit $\epsilon > 0$ (même notation que pour la question précédente).
Pour tout $x \geqslant M$,

$$\left|\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant \epsilon(\ln(cx) - \ln x) = \epsilon\ln c$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u = 0$.

Si $0 < c < 1$, alors pour tout $x \geqslant \frac{M}{c}$, donc $x \geqslant cx \geqslant M$:

$$\left|\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u\right| = \left|\int_{cx}^x \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant \epsilon(\ln x - \ln(cx)) = -\epsilon\ln c$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u = 0$.

$$\boxed{\text{Ansi pour tout } c > 0, \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u \to 0 \text{ lorsque } x \to +\infty.}$$

(c) Soit $c > 0$, d'après la relation de Chasles :

$$\frac{f(cx)}{f(x)} = \exp\left(\int_2^{cx} \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u - \int_2^{x} \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u\right) = \exp\left(\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u\right)$$

Et donc par composition :

$$\left(\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u}\mathrm{d}u\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \exp v \underset{v\to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\forall\ c > 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est à variation lente.}}$$