Devoir à la maison n°11

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Problème - Théorème de convergence monotone et « jolie formule »

Pour l'ensemble du problème, on a besoin de la définition suivante :

> Soit $a \in \mathbb{R}$.
> On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $[a, +\infty[$ est KH-intégrable sur $[a, +\infty[$, si
> $$\forall\, b > a, f \text{ est KH-intégrable sur } [a, b] \quad \text{et} \quad \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ existe}$$
> Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ cette limite.

A. Théorème de convergence monotone

Dans cette partie, on démontre le théorème de convergence monotone (appelé aussi théorème de Beppo-Levi) sur un intervalle du type $[a, +\infty[$. On commence par établir le théorème sur les segments bornées $[a, b]$ avant de généraliser.

1. Soit une suite de fonctions (f_n) définie sur $[a, b]$, KH-intégrable sur $[a, b]$. On suppose que
   - cette suite est croissante, c'est-à-dire : $\forall\, x \in [a, b], \forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
   - cette suite est convergente vers une fonction f sur $[a, b]$: $\forall\, x \in [a, b],\ \big(f_n(x)\big)_n \to f(x)$
   - la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M (indépendante de n).

   On fixe $\epsilon > 0$. Les premières questions permettent surtout ici de s'accorder sur les notations.

   (a) On note $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que (I_n) est convergente. On note I sa limite.
   Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0,\ I - \epsilon \leqslant I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I$

   (b) Montrer : pour tout $x \in [a, b]$, il existe $N(x) \geqslant n_0$ tel que $\forall\, n \geqslant N(x),\ f(x) - \epsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$

   (c) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de δ_n, jauge sur $[a, b]$ tel que
   $\forall\, \mathcal{P} = \big(([x_0, x_1], t_1), \dots ([x_{p-1}, x_p], t_p)\big)$ δ_n-fine, $|S(f_n, \mathcal{P}) - I_n| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2^n}$.

   (d) Soit h, KH-intégrable sur $[a, b]$.
   Soit $\epsilon > 0$ et δ une jauge sur $[a, b]$ tel que $\forall\, \mathcal{P}$, δ-fine, $|S(h, \mathcal{P}) - \displaystyle\int_a^b h(t)\mathrm{d}t| \leqslant \epsilon$.
   On considère trois familles $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$, $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ telles que :
   — (a_i), (b_i) et (x_i) sont croissantes, à valeurs dans $[a, b]$
   — $\forall\, i \in \mathbb{N}_q,\ x_i - \frac{\delta(x_i)}{2} \leqslant a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \leqslant x_i + \frac{\delta(x_i)}{2}$
   — $\forall\, i \in \mathbb{N}_{q-1},\ ]a_i, b_i[\cap]a_{i+1}, b_{i+1}[= \emptyset$
   montrer le lemme d'Henstock :
   $$\sum_{i=1}^{q} \left| h(x_i)(b_i - a_i) - \int_{a_i}^{b_i} h(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant 2\epsilon$$
   On pourra, par exemple, exploiter la fonction $\mathbf{1}_I : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ *avec* $I = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{q} [a_i, b_i]$

   (e) (*) On considère alors $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*,\ x \mapsto \delta_{N(x)}(x)$.
   Montrer, avec δ, que f est intégrable sur $[a, b]$ et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = I$
   On pourra commencer par écrire, pour $\mathcal{P} = \big(([x_0, x_1], t_1), \dots ([x_{p-1}, x_p], t_p)\big)$, *$\delta$-fine :*
   $$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k)) + \sum_{k=1}^{p} \left((x_k - x_{k-1}) f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)dt \right) + \sum_{k=1}^{p} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)dt$$

2. Sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
   Soit une suite de fonctions (f_n) définie sur $[a, +\infty[$, KH-intégrable sur $[a, +\infty[$. On suppose que
   - cette suite est croissante, c'est-à-dire : $\forall\, x \in [a, +\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
   - cette suite est convergente vers f sur $[a, +\infty[$: $\forall\, x \in [a, +\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \big(f_n(x)\big)_n \to f(x)$
   - la suite $\left(\int_a^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M (indépendante de n).

   (a) Soit $b > 0$. Montrer que l'on peut appliquer le théorème de convergence monotone à $((f_n - f_0)_{|[a,b]})_n$.

   (b) En déduire le théorème de convergence monotone (Beppo Levi) sur tout intervalle de type $[a, +\infty[$.

B. Relation de récurrence

Soit $\alpha > 1$.
On considère, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$$

On note ensuite $U_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.

1. Fonction Zéta de Riemann.
   Quel est l'ensemble de définition de $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$?
2. Soit $a > 0$. Fonction Gamma d'Euler.
   (a) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \geqslant M,\ x^a e^{-x} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

   (b) En déduire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $b > 0$ tel que $\forall\, c > b$, $\left|\displaystyle\int_b^c x^\alpha e^{-x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \epsilon$

   (c) Conclure que $x \mapsto x^a e^{-x}$ est KH-intégrable sur $[0, +\infty[$.

   On note, pour tout $a > 0$, $\Gamma(a+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-x}\mathrm{d}x$.
3. Etude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Soit $b > 0$. Montrer que u_n est KH-intégrable sur $[0, b]$.
   Montrer qu'il existe $N(\alpha, n)$, à préciser, tel que $\displaystyle\int_0^b u_n(x)\mathrm{d}x = N(\alpha, n) \times \int_0^{nb} x^\alpha e^{-x}\mathrm{d}x$,

   (b) Montrer que u_n est KH-intégrable sur $[0, +\infty[$.
   Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$ en fonction de Γ.
4. Application du lemme de Beppo-Levi.
   (a) Montrer, que la suite (U_n) est croissante.

   (b) Soit $x > 0$.
   Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{x^\alpha}{e^x - 1}$.

   (c) Enfin, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)$$