

Devoir surveillé n°8

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (*) voire (**).

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.**

BON COURAGE

Problème

L'objectif du problème est d'établir l'assertion (1) suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}_+$$

Pour cela,

1. Nous commencerons par définir et étudier le polynôme caractéristique d'une matrice (partie I).
2. Puis, en partie II, nous montrerons que cette assertion (1) est équivalente à l'assertion (2) :

$$\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det (I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$$

3. En partie III, nous démontrerons que (2) est vraie sous une certaine condition vérifiée par C
4. Nous exprimons, en partie IV, la condition précédente vérifiée par C sous forme d'un calcul de déterminant.
5. Enfin, dans la partie V *plus difficile*, nous démontrons que (2) (et donc (1)) est vraie dans le cas général.

Dans l'ensemble du devoir, si P est un polynôme, on notera $[P]_k$, le coefficient de P associé à X^k .
et si A est une matrice, on notera ${}^i[A]_j$, le coefficient de A en ligne i et colonne j .

On note, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, \overline{A} , la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_q, \quad {}^i[\overline{A}]_j = \overline{{}^i[A]_j}$$

Partie I - Polynôme caractéristique, valeurs propres, diagonalisabilité

Dans cette partie, le corps de base est noté \mathbb{K} , il peut être égal à \mathbb{C} ou \mathbb{R} .
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Polynôme caractéristique.
 - (a) On note pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.
Montrer que χ_A est une fonction polynomiale. Quel est son degré?
On appelle χ_A , *polynôme caractéristique de A*.
 - (b) Que vaut χ_{I_n} ?
 - (c) Montrer que : 0 est racine de χ_A si et seulement si A n'est pas inversible.
 - (d) Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que $\chi_A = \chi_B$
 - (e) En déduire une définition acceptable de χ_u pour $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un \mathbb{K} -ev de dimension égale à n .

2. Valeurs propres.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid A \times X = \lambda \cdot X\} = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.

On dit que λ est une valeur propre de A si il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, non nul tel que $A \times X = \lambda X$.

Montrer les équivalences :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff E_\lambda(A) \neq \{0\} \iff \chi_A(\lambda) = 0$$

3. Matrice diagonalisable.

On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

(a) Montrer que si A est diagonalisable, alors χ_A est scindé.

(b) Supposons que χ_A soit scindé à racines simples, notées $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

On note pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, X_i une colonne non nulle tel que $A \times X_i = \lambda_i \cdot X_i$.

i. Démontrer que (X_1, X_2, \dots, X_n) est une famille libre

(on pourra, par exemple, exploiter un déterminant de Vandermonde).

ii. En déduire une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, une matrice P , inversible de changement de bases, une matrice diagonale D telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.

On précisera bien comment obtenir la matrice P .

(c) Donner l'exemple d'une matrice diagonalisable mais dont le polynôme caractéristique n'est pas à racines simples.

On a ainsi montré :

$$A \text{ diagonalisable} \implies \chi_A \text{ scindé}$$

$$\chi_A = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i), \text{ scindé à racines simples} \implies \begin{cases} A \text{ diagonalisable} \\ \text{Les espaces propres } E_{\lambda_i}(A) \text{ sont de dimension 1} \end{cases}$$

Mais la réciproque est fautive...

Partie II - Premiers résultats concernant (1) et (2)

Dans cette partie, le corps de base est \mathbb{C} .

1. Démontrer l'assertion (1) dans le cas $n = 1$

2. Etude de la conjugaison dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\overline{A \times V} = \overline{A} \times \overline{V}$

(b) Montrer que l'application $\begin{cases} \Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{cases}$ est un automorphisme de \mathbb{R} -algèbre involutif.

C'est-à-dire : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$,

$$\Phi(\lambda A + \mu B) = \lambda \Phi(A) + \mu \Phi(B), \quad \Phi(A \times B) = \Phi(A) \times \Phi(B), \quad \Phi \circ \Phi(A) = A$$

(c) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

(d) En déduire que, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\det(A\overline{A}) \in \mathbb{R}_+^*$

3. On suppose dans cette question que A est inversible.

(a) Calculer $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$

(b) En déduire qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à déterminer, telle que :

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C})$$

4. Montrer que (1) et (2) sont équivalentes.

Dans le cas où A n'est pas inversible, on peut considérer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_x = A - xI_n$ inversible sauf sur un ensemble fini de points de \mathbb{R} et exploiter la continuité des polynômes...

Partie III - Démonstration de (2) dans un cas particulier

On considère $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\bar{C}} \text{ est un polynôme scindé à racines simples}\}$. Soit $C \in \Omega$.

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

(a) Montrer que si A est inversible, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

On pourra montrer que AB et BA sont semblables

(b) Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

On peut là aussi considérer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_x = A - xI_n \dots$

(c) Montrer que $\chi_{C\bar{C}} \in \mathbb{R}[X]$.

2. Pourquoi $C\bar{C}$ est diagonalisable? Que dire de la dimension des sous-espaces propres?

3. Soit λ une valeur propre réelle de $C\bar{C}$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, un vecteur propre associée.

$$V \in E_\lambda(C\bar{C}) \quad \text{et} \quad V \neq 0$$

(a) Montrer que $\bar{C}C\bar{V} = \lambda\bar{V}$

(b) Montrer que $C\bar{V} \in E_\lambda(C\bar{C})$.

En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $C\bar{V} = \mu V$.

On pourra raisonner sur les dimensions.

(c) Calculer $C(\bar{\mu}\bar{V})$ de deux manières différentes. En déduire que $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

4. Montrer que $\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbb{R}_+$.

Partie IV - Résultants de deux polynômes

Soit $(q, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$, un couple d'entiers naturels non nuls.

Soient $P = \sum_{k=0}^q a_k X^k \in \mathbb{K}_q[X]$, un polynôme de degré q et $Q = \sum_{h=0}^r b_h X^h \in \mathbb{K}_r[X]$, un polynôme de degré r .

On pose

$$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & \vdots & b_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_0 & b_r & & & \ddots & 0 \\ a_q & & & \vdots & 0 & \ddots & & & b_0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_q & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_r \end{vmatrix} \in \mathbb{K}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r \text{ colonnes}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{q \text{ colonnes}}$

$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q)$ est appelé résultant de P et Q . C'est le déterminant d'une matrice carrée de taille $q+r$ appelée matrice de Sylvester et notée $\text{Syl}(P, Q)$.

On pose $\mathcal{B} = ((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{r-1}, 0), (0, 1), (0, X), \dots, (0, X^{q-1}))$ et $\mathcal{B}_{\text{can}} = (X^k)_{0 \leq k \leq q+r-1}$.

On considère enfin l'application $\begin{cases} \Psi : \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ (U, V) & \longmapsto PU + QV \end{cases}$.

1. Montrer \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

2. Montrer que Ψ est une application linéaire.

3. On note alors M la matrice de Ψ relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}_{can} .
Quelle relation entre M et $\text{Syl}(P, Q)$?

4. On suppose que $P \wedge Q = 1$.

(a) Montrer que Ψ est injective.

(b) En déduire que $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) \neq 0$.

5. On suppose que $P \wedge Q \neq 1$.

En déduire que Ψ n'est pas surjective, puis la valeur de $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q)$.

Ainsi, on a montré que $P \wedge Q = 1$ si et seulement si $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) \neq 0$.

On pose $\Delta(P) = \frac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{a_q} \text{Res}_{\mathbb{K}}(P, P')$, où :

- P' désigne le polynôme dérivée de P
- $a_q = [P]_q$ est le coefficient dominant de P .

$\Delta(P)$ est appelé le discriminant de P .

6. On suppose que P est de degré 2 et on pose $P = aX^2 + bX + c$.
Calculer $\Delta(P)$.

7. On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et donc $P \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer que P est un polynôme scindé à racines simples si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$

Partie V - Fonctions polynomiales à plusieurs variables

Soit d un entier naturel non nul.

On dit qu'une fonction $P : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est polynomiale lorsqu'il existe une partie finie S de \mathbb{N}^d et une famille $(a_k)_{k \in S}$ de nombres complexes telles que

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d, \quad P(x_1, \dots, x_d) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_d) \in S} a_{(k_1, k_2, \dots, k_d)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_d^{k_d}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \det(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\ &= x_1 x_5 x_9 + x_2 x_6 x_7 + x_3 x_4 x_8 - x_1 x_8 x_6 - x_2 x_4 x_9 - x_3 x_5 x_7 \end{aligned}$$

est un polynôme de 9 variables, avec par exemple $a_{1,0,0,0,0,1,0,1,0} = -1 \dots$

On admet, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \det est un polynôme de n^2 variables : les coefficients de la matrice.

Soit P une fonction polynomiale. On pose $Z_P = \{(x_k)_{1 \leq k \leq d} \in \mathbb{C}^d \mid P(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0\}$.

1. Soient I_1, I_2, \dots, I_d des parties infinies de \mathbb{C} . On suppose que $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d \subset Z_P$.
Montrer que P est la fonction polynomiale nulle, i.e. que tous ses coefficients sont nuls.
On pourra procéder par récurrence sur d .

On rappelle que $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\overline{C}} \text{ est un polynôme scindé à racines simples}\}$.

2. Montrer, à l'aide du discriminant, qu'il existe une fonction polynomiale $R : \mathbb{C}^{n^2} \rightarrow \mathbb{C}$, non nulle telle que :

$$C \in \Omega \iff R(C) \neq 0$$

3. Démontrer alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $C_p \in \Omega$ tel que $\forall i, j \in \mathbb{N}_n, |{}^i[C_p - C]_j| < \frac{1}{p}$
4. Démontrer l'assertion (2).

On pourra également utiliser les résultats de la partie III

5. (a) En déduire plus généralement que, pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \det(\lambda I_n + C\overline{C}) \geq 0$$

- (b) En déduire que si M est une matrice telle qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = A^2$, alors les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont de multiplicité paire.