

Devoir surveillé n°8 CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrement) selon la qualité des copies.

Problème - d'après Agrégation interne 2018

Partie I - Polynôme caractéristique, valeurs propres, diagonalisabilité

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$).

1. Polynôme caractéristique.

(a) On note pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.

D'après la formule du déterminant, en notant $a_{i,j} = [A]_{j,i}$, le nombre en ligne i et colonne j de A :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{h=1}^n (x\delta_{\sigma(h),h} - a_{\sigma(h),h})$$

Or $(x\delta_{\sigma(h),h} - a_{\sigma(h),h})$ est un monôme en x , de degré au plus 1 (si $\sigma(h) = h$).

Donc, par produit, $\prod_{h=1}^n (x\delta_{\sigma(h),h} - a_{\sigma(h),h})$ est un polynôme en x de degré au plus n .

Et, par addition, $\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{h=1}^n (x\delta_{\sigma(h),h} - a_{\sigma(h),h})$ est un polynôme de degré au plus n .

Et par ailleurs, il n'y a une et une seule façon de faire apparaître x^n ,
c'est avec la permutation $\sigma = \text{id}$.

Et alors, le coefficient dominant ne se simplifie pas.

/2

Donc χ_A est bien une fonction polynomiale, de degré n exactement.

On appelle χ_A , le polynôme caractéristique de A .

(b) Pour tout $x \in \mathbb{K}$, par n -linéarité :

/1

$$\chi_{I_n}(x) = \det((x-1)I_n) = (x-1)^n \det(I_n) = (x-1)^n$$

(c) Comme $\chi_A(0) = \det(0 - A) = (-1)^n \det(A)$, on a les équivalences :

/1

0 est racine de $\chi_A \iff \chi_A(0) = 0 = \det(A) \iff A$ n'est pas inversible.

(d) Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$xI_n - A = xPP^{-1} - PBP^{-1} = P(xI_n - B)P^{-1}$$

Donc $xI_n - A$ et $xI_n - B$ sont semblables.

Or deux matrices semblables ont même déterminant : $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{C}$, donc $\chi_A - \chi_B$ admet une infinité de racines : c'est le polynôme nul.

/2

$$\chi_A = \chi_B$$

(e) Bien que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice qui dépend de la base $\mathcal{B}$ de E considérée,
toutes ces matrices sont semblables.

Donc, pour $x \in \mathbb{K}$, toutes les matrices $xI_n - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ sont semblables (pour toute base $\mathcal{B}$).

Ainsi $\det(xI_n - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$, ne dépend pas de $\mathcal{B}$, mais uniquement de u et de x .

/1

χ_u est le polynôme égale à $\chi_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)}$, quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E considérée.

2. Valeurs propres.

On a la série d'équivalences :

/1,5

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\iff \exists X \neq 0 \text{ tel que } AX = \lambda X \iff \exists X \neq 0, X \in E_\lambda(A) \\ &\iff E_\lambda(A) \neq \{0\} \iff \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \iff A - \lambda I_n \text{ non inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \iff \chi_A(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda \text{ valeur propre de } A \iff E_\lambda(A) \neq \{0\} \iff \chi_A(\lambda) = 0}$$

3. Matrice diagonalisable.

On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

(a) Supposons que A soit diagonalisable.

$$\text{Alors il existe } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ semblable à } A.$$

Alors d'après 1.(c), $\chi_A = \chi_D$.

$$\text{Or } \chi_D = \det \begin{pmatrix} x - \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & x - \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i). \quad /1,5$$

$$\boxed{\text{Donc : si } A \text{ est diagonalisable, alors } \chi_A \text{ est scindé.}}$$

(b) Supposons que χ_A soit scindé à racines simples, notées $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

On note pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, X_i , non nul tel que $A \times X_i = \lambda_i X_i$.

i. Soit $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $\sum_{k=1}^n \mu_k X_k = 0$.

En multipliant par A , on trouve (par distributivité) :

$$0 = A \times \left(\sum_{k=1}^n \mu_k X_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu_k A \times X_k = \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k X_k$$

Posons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $P_p : \ll \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k^p X_k = 0 \gg$.

— On a vu que P_1 est vraie.

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_p est vraie.

En multipliant par A :

$$0 = A \times \left(\sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k^p X_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k^p A \times X_k = \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k^{p+1} X_k$$

Donc P_{p+1} est vraie.

Considérons alors la matrice dont les colonnes sont $(\mu_1 X_1, \mu_2 X_2, \dots, \mu_n X_n) : X = (\mu_1 X_1 | \mu_2 X_2 | \dots | \mu_n X_n)$.

On a alors

$$X \times \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i X_i \mid \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i X_i \mid \dots \mid \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i^{n-1} X_i \right) = O_n$$

$$\text{Or } \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0, \text{ donc cette matrice } V \text{ est inversible :}$$

$$X = V^{-1} \times O_n = O_n$$

Donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\mu_i X_i = 0$. Comme chaque X_i est non nul, $\mu_i = 0$.

/3

$$\boxed{(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ est une famille libre.}}$$

ii. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A .

On a donc, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, la base canonique de $\mathbb{K}^n$: $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notons alors x_i , le vecteur de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à X_i , i.e. $X_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On a alors $AX_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(x_i)) = \lambda_i X_i = \lambda_i \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_i) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda_i x_i)$.

Par ailleurs, $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

donc $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$, de $n = \dim(\mathbb{K}^n)$ éléments,

donc c'est une base de $\mathbb{K}^n$, on la note $\mathcal{B}'$.

On a alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $u(x_i) = \lambda_i x_i$, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$,

diagonale.

Et ainsi, en notant $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id})$, obtenue en écrivant les coordonnées de éléments de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

/2

$$\boxed{A = P \times D \times P^{-1}}$$

(c) La matrice

/1

I_n est diagonalisable (déjà diagonale), et $\chi_{I_n} = (x-1)^n$, scindé mais pas à racines simples.

Partie II - Premiers résultats concernant (1) et (2)

1. Pour $n = 1$, (1) devient :

/1

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2 \in \mathbb{R}_+$$

Elle est vraie.

2. Etude de la conjugaison dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. $A \times v$ est une matrice colonne. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$:

$${}^i[\overline{Av}] = \overline{{}^i[Av]} = \overline{\sum_{j=1}^n {}^i[A]_j^j [v]} = \sum_{j=1}^n \overline{{}^i[A]_j^j [v]} = \sum_{j=1}^n \overline{{}^i[A]_j^j} \overline{[v]}$$

par addition et multiplication de termes conjugués.

$${}^i[\overline{Av}] = \sum_{j=1}^n \overline{{}^i[A]_j^j} \overline{[v]} = \overline{{}^i[A]_j^j} \overline{[v]} = \overline{{}^i[A]_j^j} \overline{[v]}$$

Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\overline{Av} = \overline{A} \overline{v}$.

/1

(b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$:

$${}^i[\Phi(\lambda A + \mu B)]_j = {}^i[\overline{\lambda A + \mu B}]_j = \overline{{}^i[\lambda A + \mu B]}_j = \overline{\lambda^i[A]_j + \mu^i[B]_j} = \overline{\lambda^i[A]_j} + \overline{\mu^i[B]_j} = \overline{\lambda^i[A]_j} + \overline{\mu^i[B]_j}$$

Puis, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$${}^i[\Phi(\lambda A + \mu B)]_j = \lambda^i \overline{[A]_j} + \mu^i \overline{[B]_j} = \lambda^i [\Phi(A)]_j + \mu^i [\Phi(B)]_j$$

De même :

$$\begin{aligned} {}^i[\Phi(A \times B)]_j &= \overline{{}^i[AB]_j} = \overline{\sum_{k=1}^n {}^i[A]_k^k [B]_j} = \sum_{k=1}^n \overline{{}^i[A]_k^k [B]_j} \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{{}^i[A]_k^k} \overline{[B]_j} = \sum_{k=1}^n \overline{{}^i[A]_k^k} \overline{[B]_j} = {}^i[\Phi(A) \times \Phi(B)]_j \end{aligned}$$

🔍 Remarques !

🔗 On peut aussi voir B comme une combinaison de colonnes de B , et exploiter la question précédente.

Enfin,

$${}^i[\Phi(\Phi(A))]_j = \overline{{}^i[\overline{A}]_j} = \overline{{}^i[A]_j} = {}^i[A]_j$$

Tous ces résultats étant vrais pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$:

/2

Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbre involutif.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{h=1}^n \sigma(h) [\overline{A}]_h = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{h=1}^n \overline{\sigma(h) [A]_h} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{h=1}^n \overline{\sigma(h) [A]_h} = \overline{\det(A)}$$

/1,5

pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

(d) On sait aussi que la fonction $\det$ est multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\det(A\overline{A}) = \det(A) \det(\overline{A}) = \det(A) \times \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 \in \mathbb{R}_+$$

Par ailleurs, si A est inversible ($A \in GL_n(\mathbb{C})$), $\det(A) \neq 0$, donc $|\det(A)|^2 \neq 0$.

/1

Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\det(A\overline{A}) \in \mathbb{R}_+^*$.

3. On suppose dans cette question que A est inversible.

(a) Il s'agit d'un calcul matriciel par blocs :

/1

$$\left[\begin{array}{cc} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{cc} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} A & B \\ 0 & \overline{A} + \overline{B}A^{-1}B \end{array} \right]$$

(b) On peut calculer le déterminant de ce produit, comme nous avons des matrices par blocs triangulaires inférieure ou supérieure :

$$\det \left(\left[\begin{array}{cc} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{array} \right] \right) = \det \left[\begin{array}{cc} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{array} \right] \times \det \left[\begin{array}{cc} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{array} \right] = \det \left[\begin{array}{cc} A & B \\ 0 & \overline{A} + \overline{B}A^{-1}B \end{array} \right] = \det(A) \det(\overline{A} + \overline{B}A^{-1}B)$$

Puis, comme A est inversible, il en est de même de $\overline{A}$ ($\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)} \neq 0$).

On peut factoriser à gauche par $\overline{A}$:

$$\det(A) \det(\overline{A} + \overline{B}A^{-1}B) = \det(A) \det(\overline{A}) \det(I_n + \overline{A}^{-1}\overline{B}A^{-1}B) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C})$$

où $C = \overline{A}^{-1}\overline{B}$, car alors on a bien $\overline{C} = \overline{\overline{A}^{-1}\overline{B}} = A^{-1}B$

/1,5

$$\det \left(\left[\begin{array}{cc} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{array} \right] \right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}), \text{ avec } C = \overline{A}^{-1}\overline{B}$$

🔗 Remarques !

🔗 A noter qu'on aurait pu factoriser par la droite et obtenir $C = \overline{B}A^{-1}$

4. • Supposons que (1) est vraie.

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On prend $A = I_n$ et $B = C$. Alors A est inversible, on applique le résultat de la question 4.(b) :

$$\det \left(\left[\begin{array}{cc} I_n & C \\ \overline{C} & I_n \end{array} \right] \right) = |\det(I_n)|^2 \det(I_n + D\overline{D}), \text{ avec } D = \overline{I_n}^{-1}\overline{C} = C.$$

Or d'après (1), $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det \left(\left[\begin{array}{cc} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{array} \right] \right) \in \mathbb{R}_+$.

Donc $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$.

• Réciproquement, supposons (2), c'est-à-dire : $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que A est inversible.

D'après 4.(b), il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det \left(\left[\begin{array}{cc} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{array} \right] \right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C})$.

Donc si (2) est vraie, alors $|\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$, puis (1) est vraie.

On suppose maintenant que A n'est pas inversible.

On définit, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $A_x = A - xI_n$.

$$\det(A_x) = \det(A - xI_n) = (-1)^n \det(xI_n - A) = (-1)^n \chi_A(x).$$

Soit $Z = \{x \in \mathbb{C} \mid \chi_A(x)\}$, les valeurs propres de A . Z est fini, il contient au plus n éléments.

Et donc $\forall x \in \mathbb{C} \setminus Z$, A_x est inversible.

On se retrouve alors dans le cas précédent et donc $\det \left(\begin{bmatrix} A_x & B \\ -\overline{B} & \overline{A_x} \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}_+$.

On considère $x \in \mathbb{R}$.

Par développement, $\det \left(\begin{bmatrix} A_x & B \\ -\overline{B} & \overline{A_x} \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} A - xI_n & B \\ -\overline{B} & \overline{A} - xI_n \end{bmatrix} \right)$
est un polynôme de la variable x , de degré au plus $2n$.

On note ce polynôme P :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus Z, P(x) = \det \left(\begin{bmatrix} A - xI_n & B \\ -\overline{B} & \overline{A} - xI_n \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}_+$$

Z est fini, donc il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R} \setminus Z)^{\mathbb{N}}$ tel que $(x_n) \rightarrow 0$.

P est polynomiale donc continue ; ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = P(\lim(x_n)) = P(0)$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) \in \mathbb{R}_+$ (fermé), donc $P(\lim(x_n)) \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi :

$$P(0) = \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}_+$$

/3

(1) et (2) sont équivalentes.

Partie III - Démonstration de (2) dans un cas particulier

On considère $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\overline{C}} \text{ est un polynôme scindé à racines simples}\}$ Soit $C \in \Omega$.

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

(a) $AB = A \times (BA) \times A^{-1}$.

Donc AB et BA sont semblables.

On a vu dans ce cas que les polynômes caractéristiques sont égaux :

/1

si A est inversible, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

(b) On suppose maintenant que A n'est pas inversible (sinon, on revient au cas précédent).

Comme précédemment, on considère pour tout $x \in \mathbb{C}$, $A_x = A - xI_n$.

$$\det(A_x) = \det(A - xI_n) = (-1)^n \det(xI_n - A) = (-1)^n \chi_A(x).$$

Soit $Z = \{x \in \mathbb{C} \mid \chi_A(x)\}$, les valeurs propres de A . Z contient au plus n éléments.

Et donc $\forall x \in \mathbb{C} \setminus Z$, A_x est inversible.

Ainsi, pour tout $x \notin Z$, $\chi_{A_x B} = \chi_{BA_x}$.

Une égalité polynomiale signifie une égalité des coefficients. Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \forall x \notin Z, [\chi_{A_x B}]_k = [\chi_{BA_x}]_k$$

(où comme en cours, $[P]_k$ désigne le coefficient devant λ^k pour le polynôme $P(\lambda)$).

On fixe $k \in \mathbb{N}_n$.

$$\chi_{A_x B} : \lambda \mapsto \det(\lambda I_n - (A - xI_n)B) = \det((\lambda I_n - AB) - xB)$$

l'expression de $\chi_{A_x B}(\lambda)$ est donc polynomiale en λ (et x).

Ainsi $[\chi_{A_x B}]_k$ et $[\chi_{BA_x}]_k$ sont des polynômes en x .

Ces deux polynômes sont identiques sur un ensemble infini, ils sont égaux.

Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \forall x \in \mathbb{C}, [\chi_{A_x B}]_k = [\chi_{BA_x}]_k$$

Et en particulier pour $x = 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, [\chi_{AB}]_k = [\chi_{BA}]_k \implies \chi_{AB} = \chi_{BA}$$

/3

Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

(c) D'après la propriété précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\chi_{C\overline{C}}(x) = \chi_{\overline{C}C}(x) = \det(xI_n - \overline{C}C) = \det(\overline{xI_n - C\overline{C}}) = \overline{\det(xI_n - C\overline{C})} = \overline{\chi_{C\overline{C}}(x)}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_{C\overline{C}}(x) \in \mathbb{R}$.

Supposons maintenant que $\chi_{C\overline{C}} = P + iQ$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$

(on décompose chaque coefficient de $\chi_{C\overline{C}}$ en somme d'un réel et d'un imaginaire pur).

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \chi_{C\overline{C}}(x)$ et $Q(x) = 0$.

Comme $\mathbb{R}$ est infini : il y a égalité des polynômes : $\chi_{C\overline{C}} = P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = 0$. /2

$$\boxed{\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]}$$

2. Comme $C \in \Omega$, on exploite la conclusion de la première partie : /0,5

$$\boxed{C\overline{C} \text{ est diagonalisable et on a vu que chaque sous-espace propres est de dimension 1}}$$

3. Soit λ une valeur propre *réelle* de $C\overline{C}$ et $V \in \mathbb{C}^n$, un vecteur propre associée.

$$V \in E_\lambda(C\overline{C}) \quad \text{et} \quad V \neq 0$$

(a) Par hypothèse, $C\overline{C} \times V = \lambda V$. On conjugue la relation : /0,5

$$\boxed{\overline{C}C \times \overline{V} = \lambda \overline{V}}$$

car $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Puis :

$$C\overline{C} \times (C\overline{V}) = C \times \overline{C}C \times \overline{V} = C \times (\lambda \overline{V}) = \lambda \cdot C\overline{V}$$

$$\boxed{\text{Donc } C\overline{V} \in E_\lambda(C\overline{C}).}$$

Or, on a vu que l'espace propre $E_\lambda(C\overline{C})$ est de dimension 1 :

$$E_\lambda(C\overline{C}) = \text{vect}(V)$$

$$\boxed{\text{Donc il existe } \mu \in \mathbb{C} \text{ tel que } C\overline{V} = \mu V.}$$

/1,5

(c) En conjuguant la relation précédente : $\overline{C}V = \overline{\mu} \overline{V}$.

En multipliant par C : $\lambda V = C\overline{C}V = \overline{\mu} C\overline{V} = \overline{\mu} \mu V$.

Donc $(\lambda - |\mu|^2)V = 0$. Or V est un vecteur non nul, donc nécessairement : $\lambda - |\mu|^2 = 0$ /1

$$\boxed{\lambda = |\mu|^2 \in \mathbb{R}_+}$$

4. Puisque $C \in \Omega$, χ_C est scindé à racines simples, et nécessairement unitaire

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \det(xI_n - C\overline{C}) = \chi_{C\overline{C}}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$$

Parmi les valeurs propres λ , certaines sont réelles, elles sont alors positives,

et d'autres sont complexes, dans ce cas comme $\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]$,

leur conjugué est aussi une racine de $\chi_{C\overline{C}}$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \chi_{C\overline{C}}(x) &= \prod_{i \in \mathbb{N}_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_+} (x - \lambda_i) \times \prod_{i \in \mathbb{N}_n \mid \text{Im}(\lambda_i) > 0} (x - \lambda_i)(x - \overline{\lambda_i}) \\ &= (-1)^n \prod_{i \in \mathbb{N}_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_+} (\lambda_i - x) \times \prod_{i \in \mathbb{N}_n \mid \text{Im}(\lambda_i) > 0} (|\lambda_i|^2 - 2\text{Re}(\lambda_i)x + x^2) \end{aligned}$$

On a alors

$$\det(I_n + C\overline{C}) = \det(-(-I_n - C\overline{C})) = (-1)^n \chi_{C\overline{C}}(-1) = \prod_{i \in \mathbb{N}_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_+} (\lambda_i + 1) \times \prod_{i \in \mathbb{N}_n \mid \text{Im}(\lambda_i) > 0} (|\lambda_i|^2 + 2\text{Re}(\lambda_i) + 1)$$

Or $1 + \lambda_i > 0$, pour $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$,

et, par construction, le discriminant de $|\lambda_i|^2 - 2\text{Re}(\lambda_i)x + x^2$ est strictement négatif,

donc $|\lambda_i|^2 - 2\text{Re}(\lambda_i)x + x^2 \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc pour $x = -1$, en particulier. /2

$$\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+}$$

Partie IV - Résultants de deux polynômes

Soit $(q, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$, un couple d'entiers naturels non nuls.

Soient $P = \sum_{k=0}^q a_k X^k \in \mathbb{K}_q[X]$ de degré q et $Q = \sum_{h=0}^r b_h X^h \in \mathbb{K}_r[X]$, un polynôme de degré r .

On considère enfin l'application $\begin{cases} \Psi : \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ (U, V) & \longmapsto PU + QV \end{cases}$.

1. En tant que produit cartésien, $\dim(\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]) = \dim \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \dim \mathbb{K}_{q-1}[X] = r + q$. $\mathcal{B}$ est constitué de $r + q$ éléments. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre ou bien génératrice de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

Soient $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$, alors $U \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$ et $V \in \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

$$\exists (c_0, c_1, \dots, c_{r-1}) \in \mathbb{K}^r \text{ et } (d_0, d_1, \dots, d_{q-1}) \in \mathbb{K}^q \text{ tels que } U = \sum_{i=0}^{r-1} c_i X^i \text{ et } V = \sum_{j=0}^{q-1} d_j X^j.$$

$$(U, V) = \left(\sum_{i=0}^{r-1} c_i X^i, \sum_{j=0}^{q-1} d_j X^j \right) = \sum_{i=0}^{r-1} c_i (X^i, 0) + \sum_{j=0}^{q-1} d_j (0, X^j)$$

Ainsi, $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$. /1,5

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X].}$$

2. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $(U_1, V_1), (U_2, V_2) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda_1(U_1, V_1) + \lambda_2(U_2, V_2)) &= \Psi((\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2)) = P(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2) + Q(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) \\ &= \lambda_1(PU_1 + QV_1) + \lambda_2(PU_2 + QV_2) = \lambda_1 \Psi(U_1, V_1) + \lambda_2 \Psi(U_2, V_2) \end{aligned}$$

/1

$$\boxed{\Psi \text{ est bien une application linéaire.}}$$

3. Pour $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ (on étudie la colonne $i+1$ de M),

$$\Psi(X^i, 0) = PX^i = \sum_{k=0}^q a_k X^{k+i} = \sum_{h=0}^{i-1} 0X^h + \sum_{h=i}^{q+i} a_{h-i} X^h + \sum_{h=q+i+1}^{q+r-1} 0X^h.$$

On retrouve en colonne $i+1$ (avec $i \leq r-1$) de M , exactement la colonne $i+1$ de $\text{Syl}(P, Q)$.

Pour $j \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ (on étudie la colonne $r+j+1$ de M),

$$\Psi(0, X^j) = QX^j = \sum_{k=0}^r b_k X^{k+j} = \sum_{h=0}^{j-1} 0X^h + \sum_{h=j}^{r+j} b_{h-j} X^h + \sum_{h=r+j+1}^{q+r-1} 0X^h.$$

On retrouve en colonne $j+r+1$ (avec $j \leq q-1$) de M , exactement la colonne $j+r+1$ de $\text{Syl}(P, Q)$. /1,5

$$\boxed{M = \text{Syl}(P, Q)}$$

4. On suppose que $P \wedge Q = 1$.

- (a) Soient $(U, V) \in \text{Ker } \Psi$, donc $\Psi(U, V) = PU + QV = 0$. Donc $UP = -QV$ et donc $P|QV$. Or $P \wedge Q = 1$, donc $P|V$ d'après le lemme de Gauss.

Or $\deg V \leq q-1 < q = \deg P$. Donc $V = 0$, nécessairement.

Et de même $Q|PU$, donc $Q|U$, donc pour des raisons de degré $U = 0$.

Ainsi $\text{Ker } \Psi = (0, 0)$ (l'inclusion réciproque est triviale). /1,5

$$\boxed{\Psi \text{ est injective.}}$$

- (b) Comme $\dim(\mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{r-1}[X]) = q+r = \dim(\mathbb{K}_{q+r-1}[X])$, alors Ψ est également bijective.

On a alors $\det \Psi \neq 0$.

$$\text{Or } \det \Psi = \det(\text{Syl}(P, Q)) = \text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q).$$

/1

$$\boxed{\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) \neq 0}$$

5. On suppose que $P \wedge Q \neq 1$.

On raisonne par contraposée. Supposons que Ψ est surjective.

Alors $1 \in \mathbb{K}_{q+r-1}[X]$ possède un antécédent par Ψ .

Il existe $(U, V) \in \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{r-1}[X]$ tel que $\Psi(U, V) = 1$.

Donc $PU + QV = 1$. Et d'après le théorème de Bézout, $P \wedge Q = 1$.

Par contraposée :

/1,5

$$\boxed{\text{Si } P \wedge Q \neq 1 \text{ alors } \Psi \text{ n'est pas surjective, et donc } \text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) = \det \Psi = 0.}$$

6. On a alors $P' = 2aX + b$, $q = 2$, $r = 1$,

$$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, P') = \det \begin{pmatrix} c & b & 0 \\ b & 2a & b \\ a & 0 & 2a \end{pmatrix} = 4a^2c + b^2a - 2ab^2 = a(4ac - b^2)$$

On a alors

$$\Delta(P) = \frac{(-1)^{\frac{2 \times 1}{2}}}{a} \text{Res}_{\mathbb{K}}(P, P') = b^2 - 4ac$$

/2

7. Si P est scindé à racines simples,

alors P n'admettant pas de racines multiples, P et P' n'ont aucune racine commune.

Soit $D = P \wedge P'$. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc si $\deg D > 1$, D admet une racine z .

Donc z est racine de P et P' . C'est impossible, donc $\deg D \leq 1$.

Donc $P \wedge P' = 1$. Et par conséquent $\text{Res}_{\mathbb{C}}(P, P') \neq 0$.

$$\text{Ainsi, } \Delta(P) = \underbrace{\frac{(-1)^{q(q-1)/2}}{a_q}}_{\neq 0} \text{Res}_{\mathbb{C}}(P, P') \neq 0.$$

Réciproquement, supposons que P admet une racine double z_0 .

Alors $(X - z_0) | P$ et $(X - z_0) | P'$, donc $(X - z_0) | (P \wedge P')$.

Donc $P \wedge P' \neq 1$ et donc $\text{Res}_{\mathbb{C}}(P, P') = 0$.

$$\text{Et ainsi } \Delta(P) = \frac{(-1)^{q(q-1)/2}}{a_q} \text{Res}_{\mathbb{C}}(P, P') = 0$$

/3

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, P est un polynôme scindé à racines simples si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$.

Remarques !

⚡ Dans le cas $n = 2$, on sait bien que le discriminant nul indique que P admet une racine double.

⚡ Nous avons ainsi une nouvelle façon de voir si un polynôme admet une racine multiple.

⚡ Il n'est pas impossible que cela donne aussi une clé pour la factorisation de P ...

Partie V - Fonctions polynomiales à plusieurs variables

Soit d un entier naturel non nul.

On dit qu'une fonction $P : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est polynomiale lorsqu'il existe une partie finie S de $\mathbb{N}^d$ et une famille $(a_k)_{k \in S}$ de nombres complexes telles que

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d, \quad P(x_1, \dots, x_d) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_d) \in S} a_{(k_1, k_2, \dots, k_d)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_d^{k_d}$$

Soit P une fonction polynomiale.

En reprenant les notations précédentes, on pose $Z_P = \{(x_k)_{1 \leq k \leq d} \in \mathbb{C}^d \mid P(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0\}$.

1. Nous allons raisonner par récurrence sur d comme cela est proposé ici.

Posons, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$,

$\mathbf{P}_d$: « Pour tout $P : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ polynôme, si il existe $I_1, I_2, \dots, I_d$ parties infinies de $\mathbb{C}$,
tel que $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d \subset Z_P$, alors $P = 0$ »

— $\mathbf{P}_1$ est vraie : si un polynôme (d'une variable) admet un nombre infini de racines, alors il est nul.

(Démonstration : si $P(z) = 0$, alors $(X - z) | P$, et donc $\deg P \geq \text{card}(Z(P)) \dots$)

— Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathbf{P}_d$ est vraie.

La stratégie est la suivante : on fixe $d - 1$ variables, qui intègrent les constantes. Puis on applique la proposition précédente. Et enfin $\mathbf{P}_d$.

Soit $P : \mathbb{C}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme, il existe une partie finie S_{d+1} de $\mathbb{N}^{d+1}$ et une famille $(a_k)_{k \in S_{d+1}}$ de nombres complexes telles que

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1}, P(x_1, \dots, x_n, x_{d+1}) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_d, k_{d+1}) \in S_{d+1}} a_{(k_1, k_2, \dots, k_d, k_{d+1})} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_d^{k_d} x_{d+1}^{k_{d+1}}$$

On peut alors ranger ces nombres en fonction de la valeur prise par k_{d+1} .
 S_{d+1} est finie, donc $K_{d+1} = \max\{k_{d+1}, \exists (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d \mid (k_1, \dots, k_d, k_{d+1}) \in S_{d+1}\}$ existe.

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1},$$

$$P(x_1, \dots, x_n, x_{d+1}) = \sum_{k=0}^{K_{d+1}} \underbrace{\left[\sum_{(k_1, \dots, k_d) \mid (k_1, k_2, \dots, k_d, k) \in S_{d+1}} a_{(k_1, k_2, \dots, k_d, k)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_d^{k_d} \right]}_{=A_k^{x_1, \dots, x_d}} x_{d+1}^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{K_{d+1}} A_k x_{d+1}^k}_{=Q^{x_1, \dots, x_d}(x_{d+1})}$$

où A_k est un coefficient constant, vu de x_{d+1} , mais est en fait un polynôme en les d variables $(x_1, x_2, \dots, x_d)$.

On suppose qu'il existe $I_1, \dots, I_d, I_{d+1}$ parties infinies de $\mathbb{C}$, tel que $I_1 \times \dots \times I_d \times I_{d+1} \subset Z_P$.
 Soit $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$, fixé.

alors pour tout $x_{d+1} \in I_{d+1}$, $Q^{x_1, \dots, x_d}(x_{d+1}) = 0$.

Donc $Q^{x_1, \dots, x_d}$ admet une infinité de racines. C'est le polynôme nul.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}_{K_{d+1}}$, $A_k^{x_1, \dots, x_d} = 0$.

On peut alors appliquer P_d à tous les polynômes $A_k^{x_1, \dots, x_d}$, nul pour $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$.

Donc P est identiquement nul et P_{d+1} et ainsi démontrée. /3

Si $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d \subset Z_P$, où I_k est infini, alors P est la fonction polynomiale nulle.

2. $C \in \Omega \iff \chi_{C\overline{C}}$ est un polynôme scindé à racines simples $\iff \Delta(\chi_{C\overline{C}}) \neq 0$.

On note, pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P_k : (x, x_1, \dots, x_{n^2}) \mapsto [\chi_{X\overline{X}}]_k$ où $\forall i, j \in \mathbb{N}_n$, $^i[X]_j = x_{n(i-1)+j}$.
 Il s'agit bien d'une application polynomiale : par produit et addition matriciels, puis composition avec la fonction polynomiale det et enfin extraction de la k^{e} composante.

Puis, on note, $\Delta'(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto a_n \times \Delta(P, P')$ où $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

C'est encore une fonction polynomiale, car la fonction $\text{Res}_{\mathbb{C}}$ est un déterminant.

Enfin, par composition, avec $R = \Delta' \circ (P_0, P_1, \dots, P_n) \circ ((^i[C]_j))$, polynomiale : /2

Il existe une fonction polynomiale $R : \mathbb{C}^{n^2} \rightarrow \mathbb{C}$ non nulle, telle que : $C \in \Omega \iff R(C) \neq 0$.

R est non nulle, puisque Ω est non vide.

3. Soit $C \notin \Omega$ et $p \in \mathbb{N}$,

On note, pour tout $(h_1, \dots, h_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$, $C_{h_1, \dots, h_{n^2}} = C + \sum_{i,j} h_{n(i-1)+j} E_{i,j}$.

Si pour tout $(h_1, \dots, h_{n^2}) \in (]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[)^{n^2}$, $C_{h_1, \dots, h_{n^2}} \notin \Omega$, Alors $R(C_{h_1, \dots, h_{n^2}}) = 0$.

Donc R s'annule sur le produit cartésien $\otimes_{i,j \in \mathbb{N}_n} \left[^i[C]_j - \frac{1}{p}, ^i[C]_j + \frac{1}{p} \right]$.

Et donc d'après la question 1., R est le polynôme identiquement nul. Ce qui est absurde.

Donc, il existe $(h_1, \dots, h_{n^2}) \in (]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[)^{n^2}$ tel que $C_{h_1, \dots, h_{n^2}} \in \Omega$. /2

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe donc $C_p \in \Omega$ tel que $\forall i, j \in \mathbb{N}_n$, $^i[C_p - C]_j < \frac{1}{p}$

4. En partie III, on a montré que pour $C \in \Omega$, (2) est toujours vrai.

On suppose C quelconque.

On peut considérer une suite $(C_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim(^i[C_p]_j) = ^i[C]_j$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$.

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_k \in \Omega$, donc $\det(I_n + C_k \overline{C_k}) \in \mathbb{R}_+$.

Puis, det est polynomial en les coefficients donc il existe un polynôme P à n^2 variable tel que

$$\det(I_n + M \overline{M}) = P(^1[M]_1, ^1[M]_2, \dots, ^n[M]_{n-1}, ^n[M]_n)$$

Donc par continuité :

$$\det(I_n + C_k \overline{C_k}) = \underbrace{P(^1[C_k]_1, \dots, ^n[C_k]_n)}_{\in \mathbb{R}_+} \rightarrow P(\lim_k ^1[C_k]_1, \dots, \lim_k ^n[C_k]_n) = P(^1[C]_1, \dots, ^n[C]_n) = \det(I_n + C \overline{C})$$

Donc comme la limite d'un nombre positif est positif : /2

Pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(I_n + C \overline{C}) \in \mathbb{R}_+$ (assertion (2)).

5. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Considérons $\tilde{C} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}C$, alors $\overline{\tilde{C}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\overline{C}$, car $\lambda \geq 0$.

On a alors

$$\det(\lambda I_n + C\overline{C}) = \lambda^n \det(I_n + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}C \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\overline{C}) = \lambda^n \det(I_n + \tilde{C}\overline{\tilde{C}}) \in \mathbb{R}_+$$

d'après la question précédente. Donc :

/1

pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\det(\lambda I_n + C\overline{C}) \geq 0$
--

(b) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = A^2 = A\overline{A}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$\chi_M(-\lambda) = \det(-\lambda I_n - M) = (-1)^n \det(\lambda I_n + A\overline{A})$$

D'après la question précédente, $x \mapsto \chi_M(x)$ est de signe constant (celui de $(-1)^n$) sur $\mathbb{R}_-$.

Donc, si μ est une racine négative du polynôme χ_M (i.e. μ valeur propre réelle strictement négative de M), elle est d'ordre pair (sinon, $\chi_M(\mu^+) \times \chi_M(\mu^-) < 0$).

/2

si $M = A^2$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors les v.p. réelles strictement négatives de M sont de multiplicité paire.
