

Devoir à la maison n°9 CORRECTION

Exercice

1. (a) Par définition, pour tout $y \in \text{Im } u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
 Puis pour ce x , il existe un couple $(x_1, x_2) \in E' \times \text{Ker } u$ tel que $x = x_1 + x_2$.
 On a alors $y = u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_1) + 0$.
 Ainsi, $\tilde{u}$ est surjective de E' sur $\text{Im } u$.
 Par ailleurs, si $x \in \text{Ker } \tilde{u}$, alors $\tilde{u}(x) = u(x) = 0$, donc $x \in E' \cap \text{Ker } u = \{0\}$.
 Donc $x = 0$ et $\tilde{u}$ est injective.
 Enfin, comme $u, \tilde{u}$ est linéaire.

Donc, $\tilde{u} : E' \rightarrow \text{Im } u, x \mapsto u(x)$ est un isomorphisme.

- (b) Soit $y \in F$.
 Par supplémentarité : il existe un unique couple $(y_1, y') \in \text{Im } u \times F'$ tel que $y = y_1 + y'$.
 Ensuite, par surjectivité de $\tilde{u}$, il existe $x' \in E'$ tel que $y_1 = \tilde{u}(x') = u(x')$.
 Donc, on a prouvé l'existence du couple $(x', y') \in E' \times F'$ recherché.
 Si $y = u(a') + b' = u(x') + y'$. Alors $b' - y' = u(x' - a') \in \text{Im } u \cap F' = \{0\}$.
 Donc $b' = y'$, puis $x' - a' \in \text{Ker } u \cap E' = \{0\}$.
 Et ainsi, $x' = a'$.

Pour tout $y \in F$, il existe un couple unique $(x', y') \in E' \times F'$ tel que $y = u(x') + y'$.

- (c) L'application est bien définie de F à E . Montrons qu'elle est linéaire.
 Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in F$.
 Par décomposition : $y_1 = u(v(y_1)) + y'_1$ et $y_2 = u(v(y_2)) + y'_2$, avec $y'_1, y'_2 \in F'$.

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + \lambda_2 y_2 &= \lambda u(v(y_1)) + \lambda_1 y'_1 + \lambda_2 u(v(y_2)) + \lambda_2 y'_2 \\ &= \lambda u(v(y_1)) + \lambda_1 y'_1 + \lambda_2 u(v(y_2)) + \lambda_2 y'_2 \\ &= u(\lambda v(y_1) + \lambda_2 v(y_2)) + \underbrace{\lambda_1 y'_1 + \lambda_2 y'_2}_{\in F'} \end{aligned}$$

par linéarité de u . Et donc par unicité de la décomposition : $v(\lambda y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda v(y_1) + \lambda_2 v(y_2)$.

v est une application linéaire de F sur E .

- (d) Si u est un isomorphisme, $\text{Im } u = F$ et donc $F' = \{0\}$.
 Et donc la décomposition devient : $y = u(v(y)) + 0$, donc $u \circ v = \text{id}$.
 Puis comme u est un isomorphisme, il n'admet qu'un inverse à droite : u^{-1}

$$v = u^{-1}$$

2. (a) Soit $y \in \text{Ker } v$.
 On sait qu'il existe un unique $y' \in F'$ tel que $y = u(v(y)) + y'$.
 Et comme $v(y) = 0$, alors $u(v(y)) = u(0) = 0$ et donc $y = y'$. Ainsi $y \in F'$.
 Réciproquement, si $y \in F'$, alors la décomposition de type 1.(b) devient :
 Il existe un unique couple $(x', y') \in E' \times F'$ tel que $y = u(x') + y'$.
 Or $y = u(0) + y$ vérifie cette décomposition, donc $v(y) = x' = 0$ et $y' = y$ Ainsi $y \in \text{Ker } v$.

$$\text{Ker } v = F'$$

Par définition de v , $\text{Im } v \subset E'$.

Réciproquement, considérons $x' \in E'$, puis $y = u(x') + 0$, et donc $v(y) = x'$. Donc $x' \in \text{Im } v$.

$$\text{Im } v = E'$$

- (b) Soit $a \in E$, alors $a = b + c$, avec $b \in \text{Ker } u$ et $c \in E'$.
 Puis $u(a) = u(b) + u(c) = 0 + u(c) = u(c)$.

A la question précédente, on a vu que pour tout $x' \in E'$, $v(u(x')) = x'$.

$$(u \circ v \circ u)(a) = u(v(u(a))) = u(v(u(c))) = u(c) = u(a)$$

$$\boxed{\forall a \in E, (u \circ v \circ u)(a) = u(a) \text{ donc } u \circ v \circ u = u}$$

De même, considérons $b \in F$, alors il existe $b' \in F' = \text{Ker } v$ tel que $b = u(v(b)) + b'$.

On sait que $v(b') = 0$. Par linéarité,

$$v(b) = v(u(v(b)) + v(b')) = (v \circ u \circ v)(b)$$

$$\boxed{\forall b \in F, v(b) = (v \circ u \circ v)(b) \text{ donc } v \circ u \circ v = v}$$

3. Réciproquement, soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

(a) On calcule le carré :

$$(u \circ v)^2 = u \circ \underbrace{v \circ u \circ v}_{=v} = u \circ v \quad (v \circ u)^2 = v \circ \underbrace{u \circ v \circ u}_{=u} = v \circ u$$

$$\boxed{u \circ v \text{ et } v \circ u \text{ sont des projecteurs.}}$$

Soit $y \in \text{Ker } (u \circ v)$, alors $u(v(y)) = 0$, donc $v(y) = v(u(v(y))) = v(0) = 0$. Donc $y \in \text{Ker } v$.

Réciproquement : si $y \in \text{Ker } v$, $u(v(y)) = u(0) = 0$, donc $y \in \text{Ker } (u \circ v)$. Soit $x \in \text{Im } (u \circ v)$, alors il existe $a \in F$ tel que $x = u(v(a))$, donc $x \in \text{Im } u$.

Réciproquement : si $x \in \text{Im } u$, il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$, puis $x = (u \circ v \circ u)(a) = (u \circ v)(u(a))$. Donc $x \in \text{Im } u \circ v$.

$$\boxed{\text{Ker } (u \circ v) = \text{Ker } v = F' \quad \text{Im } (u \circ v) = \text{Im } u}$$

Soit $x \in \text{Ker } (v \circ u)$, alors $v(u(x)) = 0$, donc $u(x) = u(v(u(x))) = u(0) = 0$. Donc $x \in \text{Ker } u$.

Réciproquement : si $x \in \text{Ker } u$, $v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $x \in \text{Ker } (v \circ u)$. Soit $y \in \text{Im } (v \circ u)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = v(u(x))$, donc $y \in \text{Im } v$.

Réciproquement : si $y \in \text{Im } v$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$, puis $y = (v \circ u \circ v)(x) = (v \circ u)(v(x))$. Donc $y \in \text{Im } v \circ u$.

$$\boxed{\text{Ker } (v \circ u) = \text{Ker } u \quad \text{Im } (v \circ u) = \text{Im } v = E'}$$

(b) Puisqu'il s'agit de projecteurs ; pour chacun, l'image et le noyau sont supplémentaires dans E et F respectivement :

$$\boxed{E = \text{Ker } (v \circ u) \oplus \text{Im } (v \circ u) = \text{Ker } u \oplus \text{Im } v \text{ et } F = \text{Im } (u \circ v) \oplus \text{Ker } (u \circ v) = \text{Im } u \oplus \text{Ker } v.}$$

(c) Pour tout $x \in \text{Im } v$, il existe $a \in F$ tel que $x = v(a)$:

$$\bar{v} \circ \bar{u}(x) = v(u(v(a))) = v(a) = x \implies \bar{v} \circ \bar{u} = \text{Id}_{\text{Im } v}$$

Pour tout $y \in \text{Im } u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.

$$\bar{u} \circ \bar{v}(y) = u(v(u(x))) = u(x) = y \implies \bar{u} \circ \bar{v} = \text{Id}_{\text{Im } u}$$

$$\boxed{\bar{v} \text{ est l'isomorphisme réciproque de } \bar{u}.}$$

Problème

A. Relation de récurrence

1. On fixe $n \geq 3$.

(a) On note $A^{I \wedge J}$, la matrice obtenue en enlevant à la matrice A , toutes les lignes $i \in I$ et toutes les colonnes $j \in J$.

$D_n^{\{n\} \wedge \{1\}}$ est une matrice triangulaire inférieure avec que des 1 sur la diagonale,

$$\boxed{\text{son déterminant vaut } 1}$$

(b) On a

$$D_n^{\{n\} \wedge \{n\}} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \cdots & a_1 \end{pmatrix} = D_{n-1}$$

$$\boxed{\det(D_n^{\{n\} \wedge \{n\}}) = \Delta_{n-1}}$$

(c)

Pour la dernière ligne, le coefficient a_k se trouve en colonne $n - k + 1$

On supprime alors la colonne $n - k + 1$,

$$\left(\begin{array}{cccccccc} a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & & & \vdots \\ a_{n-k} & & \ddots & a_1 & 1 & 0 & & \vdots \\ a_{n-k+1} & & & \ddots & a_1 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & a_1 & 1 & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & a_k & a_{k-1} & \cdots & \ddots & \ddots & 1 \\ a_n & \cdots & a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{array} \right)^{\{n\} \wedge \{n-k+1\}} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & & \vdots \\ a_{n-k} & & \ddots & a_1 & 0 & 0 & \vdots \\ a_{n-k+1} & & & \ddots & & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & a_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & & a_k & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ a_n & \cdots & & a_{k+1} & a_{k-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\det(D_n^{\{n\} \wedge \{n-k+1\}}) = \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ B_k & C_k \end{pmatrix} \text{ où } A_k = D_{n-k} \text{ et } C_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{k-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On applique le développement par rapport à la dernière ligne (a_k est en colonne $j = n - k + 1$) :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} [D_n]_j \det(D_n^{\{n\} \wedge \{j\}}) \\ &= (-1)^{n+1} a_n \det D_n^{\{n\} \wedge \{1\}} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{2n+1-k} a_k \det \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ B_k & C_k \end{pmatrix}}_{k=n-j+1} + (-1)^{2n} a_1 \det D_n^{\{n\} \wedge \{n\}} \\ &= (-1)^{n+1} a_n \times 1 + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{k-1} a_k \det A_k \det C_k + a_1 \Delta_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} a_n \Delta_0 + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{k-1} a_k \Delta_{n-k} + a_1 \Delta_{n-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k \Delta_{n-k} \end{aligned}$$

car $\det A_k = \Delta_{n-k}$, $\det C_k = 1$ et $1 = \Delta_0$.

$$\text{pour tout } n \geq 3, \Delta_n = \sum_{h=1}^n (-1)^{h-1} a_h \Delta_{n-h}.$$

3. $\Delta_1 = a_1 = a_1 \times 1 = a_1 \times \Delta_0$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - a_2 = a_1 \Delta_1 - a_2 \Delta_0$$

Donc la relation précédente est également vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

B. Détermination de Δ_n

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I contenant a , alors f admet un $DL_n(a)$.

Ensuite, il s'agit d'une multiplication polynomiale : Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) \times g(x) &= \left(\sum_{k=0}^N b_k x^k + o(x^N) \right) \left(\sum_{k=0}^N c_k x^k + o(x^N) \right) \\ &= P(x) \times Q(x) + o(x^N) = \sum_{k=0}^N \left(\sum_{p+q=k} b_p c_q \right) x^k + o(x^N) \end{aligned}$$

Puis, par unicité du développement limité :

$$\text{Le } DL_N(fg)(0) \text{ est } \sum_{k=0}^N d_k x^k + o(x^N) \text{ où } d_k = \sum_{i=0}^n b_i c_{k-i}.$$

2. Par composition, il faut et il suffit que $1+x > 0$.

Donc le plus grand intervalle I sur lequel f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ est $I =]-1, +\infty[$

On peut alors appliquer le théorème de Taylor-Young :

f et g admettent un développement limité à tout ordre en 0 car $0 \in I$.

3. On note $\mathcal{P}_k : \ll$ pour tout $x \in I$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k! a_k}{(1+x)^{k+1/2}} \gg$.

— Pour tout $x \in I$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{(-1)^0 0! a_0}{(1+x)^{0+1/2}}$.

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.

$f^{(k)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! a_k \times \frac{-(k + \frac{1}{2})}{(1+x)^{k+1/2+1}} = \frac{(-1)^{k+1} \frac{(2k+1)k! a_k}{2}}{(1+x)^{k+1+1/2}}$$

Or $a_k = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2k)}$, donc

$$\frac{(2k+1)k! a_k}{2} = (k+1)! \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2k-1)(2k+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2k)(2(k+1))} = (k+1)! a_{k+1}$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k! a_k}{(1+x)^{k+1/2}}$.

4. Pour tout $x \in I$, $f(x) \times g(x) = 1$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $d_k = 0$ et $d_0 = 1$.

Notons que, d'après la formule de Taylor,

$$b_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k a_k$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$d_n = 0 = \sum_{k=0}^n b_k c_{n-k} = b_0 c_n + \sum_{k=1}^n b_k c_{n-k} \implies c_n = \sum_{k=1}^n (-b_k) c_{n-k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k c_{n-k}$$

car $b_0 = f(0) = 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k c_{n-k}$.

5. Par récurrence forte, on a alors $\Delta_n = c_n$, car ces deux suites vérifient la même relation de récurrence et ont la même valeur en 0.

Pour tout entier n , $\Delta_n = c_n$.

6. Remarquons que pour tout $x \in I$, $g'(x) = \frac{1}{2}f(x)$.

Ainsi, par linéarité de la dérivation, $g^{(k+1)} = \frac{1}{2}f^{(k)}$.

$$c_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2k} \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k} a_{k-1}$$

7. Ainsi, comme $a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$,

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = c_n = (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{2n} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(2^n n!)}$