Devoir à la maison n°4

La « notation »tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice

Dans tout le problème, l'énoncé des lettres d'un triangle se fera toujours dans le sens direct.
On considère une triangle (quelconque) ABC. Soient D, E et F tels que les triangles BAD, CBE et ACF sont équilatéraux (et nécessairement à l'extérieur de ABC).
On note G, H et I les centres (de gravité, par exemple) respectifs de ces trois triangles équilatéraux.
On veut montrer que GHI est lui-même un triangle équilatéral.
Pour tout le problème, on notera : $j = e^{2i\pi/3}$ et en minuscule m l'affixe du point M.

1. Faire une figure.
2. Montrer qu'un triangle XYZ est équilatéral si et seulement si $e^{i\pi/3}(x - z) = (y - z)$.
3. En déduire que $j(a - g) = (b - g)$, $j(b - h) = (c - h)$ et $j(c - i) = (a - i)$.
4. Donner alors une relation entre g, h et i, en déduire la nature du triangle GHI.
5. Montrer que les centres de gravité des triangles ABC et GHI coïncident.
   On admet que l'affixe du centre de gravité d'un triangle XYZ et $\frac{1}{3}(x + y + z)$.
6. A qui est attribué ce théorème ?

Problème : Limite sup et Limite inf d'une suite (u_n)

Dans tout le problème, on fixe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on suppose bornée.

1. Montrer que si A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ alors
$$A \subset B \Longrightarrow \sup A \leqslant \sup B$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $X_n = \{u_p, p \geqslant n\}$.
   Montrer que X_n admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \sup X_n$ et $i_n = \inf X_n$.
   Montrer que la suite (s_n) est décroissante et que la suite (i_n) est croissante.
   (c) Montrer que les suites (s_n) et (i_n) sont convergentes. On note
$$L_s = \lim(s_n) = \limsup u \qquad L_i = \lim(i_n) = \liminf u$$

3. Déterminer les suites (s_n) et (i_n) ainsi que leurs limites L_s et L_i dans chacun des cas suivants :
   (a) u est constante, nulle
   (b) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$
   (c) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$
4. (a) On suppose (pour cette question) que $L_s = L_i$.
   Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   (b) Soit $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$, une suite extraite de (u_n).
   On suppose que v converge. Montrer que
$$L_i \leqslant \lim(v_n) \leqslant L_s$$
   (c) On suppose ici que la suite (u_n) est convergente, de limite ℓ.
   Montrer que $L_s = L_i = \ell$
5. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui soit convergente et de limite L_s.
   (On a de même pour L_i, on a ainsi un résultat plus précis que celui de Bolzano-Weierstrass).