Devoir à la maison n°12

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Exercice - Record

Soit n, un entier supérieur ou égal à 2. On dispose d'une boite contenant n jetons numérotés de 1 à n. On vide la boîte en extrayant les jetons un à un, au hasard et sans remise. On dit que le tirage numéro i est un record lorsque le $i^{\text{ème}}$ numéro tiré est supérieur à tous les numéros précédents. Par convention, le premier tirage est un record. On note X, la variable aléatoire qui donne le nombre de records obtenus au cours des n tirages. On définit aussi les variables indicatrices X_i valant 1 lorsque le $i^{\text{ème}}$ tirage est un record et 0 sinon.

1. Pour $i \in \{1, \dots n\}$, déterminer la loi de X_i
2. Déterminer $\mathbf{P}(X = 1)$ puis $\mathbf{P}(X = n)$
3. Exprimer X en fonction des variables X_i.
4. Déduire des questions précédentes l'espérance de X, notée $\mathbf{E}(X)$.

Problème - Espérance conditionnelle et martingale

I. Illustration d'espérance conditionnelle

On se place sur un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbf{P})$. On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de lois binomiales de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p).

1. Rappeler la valeur de $X_1(\Omega)$, $\mathbf{P}(X_1 = k)$, $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{V}(X_1)$.
2. Autour de $X_1 + X_2$.
   (a) Donner l'expression simplifiée de la série génératrice associée à X_1 :
   $$g_{X_1}(t) = \sum_{k \in X_1(\Omega)} \mathbf{P}(X_1 = k) t^k$$
   et également celle associée à $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire la relation de Vandermonde :
   $$\sum_{k=0}^{r} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{r-k} = \binom{n_1 + n_2}{r}$$
   On précisera les valeurs de r admissibles
3. Vers la variable aléatoire appelée espérance conditionnelle.
   On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k : « $X_1 + X_2 = k$ ».
   (a) Calculer, pour tout $h \in X_1(\Omega)$, $\mathbf{P}_{A_k}(X_1 = h)$.
   Vérifier que $\displaystyle\sum_{h \in X_1(\Omega)} \mathbf{P}_{A_k}(X_1 = h) = 1$.
   (b) Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{h \in X_1(\Omega)} h \mathbf{P}_{A_k}(X_1 = h)$, que l'on notera $\mathbf{E}_{A_k}(X_1)$
   (c) On note $Y : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $\omega \mapsto \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_{A_k}(X_1) \mathbf{1}_{[A_k]}$.
   On a ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad Y = \mathbf{E}_{A_k}(X_1) \iff A_k(\omega)$ est réalisé $\iff X_1 + X_2 = k$.
   Calculer $\mathbf{E}(Y)$.
   On montrera en particulier que $\mathbf{E}(Y) (= \mathbf{E}(\mathbf{E}_{X_1+X_2=k}(X_1))) = \mathbf{E}(X_1)$.

II. Espérance conditionnelle et martingale

On considère X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbf{P})$. $(X = x)_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
On appelle ***espérance conditionnelle de*** Y ***sachant*** X, *la variable aléatoire*

$$\mathbf{E}(Y||X) = \sum_{x\in X(\Omega)} \underbrace{\mathbf{E}(Y|X = x)}_{\mathbf{E}_{X=x}(Y)} \mathbf{1}_{X=x}$$

Autrement écrit :

$$\mathbf{E}(Y||X)(\omega) = \mathbf{E}(Y|X = x) \text{ ssi } X(\omega) = x$$

1. Exprimer Y de la partie précédente, comme une espérance conditionnelle.
2. On rappelle que

$$\mathbf{E}(Y|X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbf{P}(Y = y|X = x) = \frac{\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbf{P}(Y = y \cap X = x)}{\mathbf{P}(X = x)}$$

$$= \frac{\mathbf{E}(Y \cdots \mathbf{1}_{X=x})}{\mathbf{P}(X = x)}$$

3. On considère deux variables aléatoires : X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et Y à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ par :

$$\mathbf{P}(Y = 0|X = k) = 1 - p \qquad \mathbf{P}(Y = k|X = k) = p$$

   (a) Calculer, pour tout $k \in [\![0]\!]$, $\mathbf{E}(Y|X = k)$.
   (b) En déduire une expression de $\mathbf{E}(Y||X)$.
4. Montrer que si X et Y sont indépendantes :

$$\mathbf{E}(Y||X) = \mathbf{E}(Y) \text{ p.s.}$$

   On souligne que $\mathbf{E}(Y||X)$ *n'est pas un nombre, mais bien une variable aléatoire, ici égale à un nombre presque sûrement.*
5. Soient X, Y_1 et Y_2 trois variables aléatoires et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbf{E}(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2||X) = \lambda_1\mathbf{E}(Y_1||X) + \lambda_2\mathbf{E}(Y_2||X)$$

6. Martingales
   (a) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et d'espérance nulle avec $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$.
   On peut supposer que $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Considérons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   Décrire la variable aléatoire $\mathbf{E}(S_{n+1}||S_n)$.
   (b) Montrer que ce résultat reste vrai, en supposant juste l'indépendance de X_i, et l'espérance nulle.
   (c) On dit que la suite de variable aléatoire (M_n) est une *martingale si*

$$\mathbf{E}(M_{n+1}||M_0, M_1, \ldots M_n) = M_n$$

   Autrement écrit : lorsqu'on connait les valeurs de M_0*,* M_1*,...*M_n*, la meilleure estimation que l'on puisse faire de* M_{n+1} *est égale à la variable aléatoire* M_n*.*
   Montrer que la suite (S_n) est une martingale.
   (d) Et le jeu du record ?

III. Applications