Devoir à la maison n°11
CORRECTION

Problème - Théorème de convergence monotone et « jolie formule »

A. Théorème de convergence monotone

Dans cette partie, on démontre le théorème de convergence monotone (appelé aussi théorème de Beppo-Levi) sur un intervalle du type $[a, +\infty[$. On commence par établir le théorème sur les segments bornées $[a, b]$ avant de généraliser.

1. Soit une suite de fonctions (f_n) définie sur $[a, b]$, KH-intégrable sur $[a, b]$. On suppose que
   • cette suite est croissante, c'est-à-dire : $\forall\, x \in [a, b], \forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
   • cette suite est convergente vers une fonction f sur $[a, b]$: $\forall\, x \in [a, b],\ \big(f_n(x)\big)_n \to f(x)$
   • la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M (indépendante de n).

   On fixe $\epsilon > 0$. Les premières questions permettent surtout ici de s'accorder sur les notations.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\forall\, x \in [a, b], f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \qquad \Longrightarrow \qquad I_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f_{n+1}(t)\mathrm{d}t = I_{n+1}$$

   Donc (I_n) est un suite croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\forall\, x \in [a, b], f_n(x) \leqslant M \qquad \Longrightarrow \qquad I_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}t = M(b-a)$$

   Donc (I_n) est bornée.
   D'après le théorème de convergence monotone :

   $$\boxed{(I_n) \text{ est convergente. On note } I \text{ sa limite, alors } I = \sup(I_n).}$$

   Et, pour ϵ fixé précédemment :

   $$\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geqslant n_0,\ I - \epsilon \leqslant I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I}$$

   (b) De même, pour x fixé, la suite $(f_n(x))_n$ converge, de manière croissante, vers $f(x)$, donc :

   $$\boxed{\exists\, N(x) \geqslant n_0 \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N(x),\ f(x) - \epsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)}$$

   (c) On fixe $n \in \mathbb{N}$, on considère alors $\epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^n}$.
   Par définition de l'intégrale I_n de f_n sur $[a, b]$,

   $$\boxed{\text{il existe } \delta_n, \text{ jauge sur } [a,b] \text{ tel que } \forall\, \mathcal{P} = \big(([x_0, x_1], t_1), \ldots ([x_{p-1}, x_p], t_p)\big)\ \delta_n\text{-fine, } |S(f_n, \mathcal{P}) - I_n| \leqslant \epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^n}.}$$

   (d) Soit h, KH-intégrable sur $[a, b]$.
   Soit $\epsilon > 0$ et δ une jauge sur $[a, b]$ tel que $\forall\, \mathcal{P}$, δ-fine, $|S(h, \mathcal{P}) - \int_a^b h(t)\mathrm{d}t| \leqslant \epsilon$.
   On considère trois familles $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$, $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ telles que :
   – (a_i), (b_i) et (x_i) sont croissantes, à valeurs dans $[a, b]$
   – $\forall\, i \in \mathbb{N}_q,\ x_i - \frac{\delta(x_i)}{2} \leqslant a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \leqslant x_i + \frac{\delta(x_i)}{2}$
   – $\forall\, i \in \mathbb{N}_{q-1},\ ]a_i, b_i[\bigcap]a_{i+1}, b_{i+1}[= \emptyset$
   • On note $b_0 = a$ et $a_{q+1} = b$, afin d'uniformiser les notations.
   • On va s'intéresser aux parties complémentaires de $\bigcup_{i=1}^q [a_i, b_i]$ dans $[a, b]$.
   D'après la relation de Chasles, h est intégrable sur $[b_i, a_{i+1}]$ (pour $i \in [\![0, q]\!]$).
   Soit δ_i une jauge sur $[b_i, a_{i+1}]$ tq : $\forall\, \mathcal{P}_i$ δ_i-fine, $\left|S(h_{|[b_i, a_{i+1}]}, \mathcal{P}_i) - \int_{b_i}^{a_{i+1}} h(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\epsilon}{q+1}$.

Remarques !

A noter qu'en cours, nous n'avions pas démontré ce sens de la relation de Chasles.
En fait, il nous manquait un candidat pour la valeur de $\int_{[a,c]} f$, *si on a* $a < c < b$ *et* f *intégrable sur* $[a, b]$.
Une stratégie possible, lorsqu'il nous manque la valeur de la limite est d'employer des suites de Cauchy comme on l'a vu en cours de topologie.
Ici cela donnerait :
1. Comme $\mathbb{R}$ *est complet,*
dire que f *est intégrable sur* $[a, b]$: $\exists\ I \mid \forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^* \mid \forall\ \mathcal{P}$ *δ-fine,* $|S(f, \mathcal{P}) - I| < \epsilon$.
est équivalent à affirmer que :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^* \mid \forall\ \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \text{ δ-fines, } |S(f, \mathcal{P}_1) - S(f, \mathcal{P}_2)| < \epsilon$$

2. On démontre alors que $f_{[a,c]}$ *vérifie le critère de Cauchy.*

• On note $\delta_i' = \min(\delta_i, \delta_{|[b_i,a_{i+1}]})$. Puis on considère $\mathcal{P}_i$, une subdivision pointée δ_i'-fine.
Alors $\mathcal{P} = (\bigcup_{i=0}^{q} \mathcal{P}_i) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{q} ([a_i, b_i], x_i) \right)$ est une subdivision δ-fine de $[a, b]$.
• Donc (**Nous encourageons le lecteur à illustrer la démonstration par un DESSIN**)

$$S(h, \mathcal{P}) - \int_a^b h(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{q} S(h_{|[b_i,a_{i+1}]}, \mathcal{P}_i) - \int_{b_i}^{a_{i+1}} h(t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{q} h(x_i)(b_i - a_i) - \int_{a_i}^{b_i} h(t)\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{q} h(x_i)(b_i - a_i) - \int_{a_i}^{b_i} h(t)\mathrm{d}t \right| &= \left| S(h, \mathcal{P}) - \int_a^b h(t)\mathrm{d}t - \sum_{i=0}^{q} S(h_{|[b_i,a_{i+1}]}, \mathcal{P}_i) + \int_{b_i}^{a_{i+1}} h(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \left| S(h, \mathcal{P}) - \int_a^b h(t)\mathrm{d}t \right| + \left| \sum_{i=0}^{q} S(h_{|[b_i,a_{i+1}]}, \mathcal{P}_i) - \int_{b_i}^{a_{i+1}} h(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \left| S(h, \mathcal{P}) - \int_a^b h(t)\mathrm{d}t \right| + \sum_{i=0}^{q} \left| S(h_{|[b_i,a_{i+1}]}, \mathcal{P}_i) - \int_{b_i}^{a_{i+1}} h(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \epsilon + (q+1)\frac{\epsilon}{q+1}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{q} \left| h(x_i)(b_i - a_i) - \int_{a_i}^{b_i} h(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant 2\epsilon}$$

(e) On considère alors $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \delta_{N(x)}(x)$.
Soit $\mathcal{P} = \big(([x_0, x_1], t_1), \dots ([x_{p-1}, x_p], t_p)\big)$, une subdivision pointée δ-fine.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on compare f à son intégrale potentielle, en passant par $f_{N(t_k)}$ (pour tout k) :

$$\begin{aligned}
|S(f, \mathcal{P}) - I| &= \Big| \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k)) + \sum_{k=1}^{p} \left((x_k - x_{k-1}) f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \right) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{p} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t - I \Big| \\
&\leqslant \Big| \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k) \Big| + \Big| \sum_{k=1}^{p} \left((x_k - x_{k-1}) f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \right) \Big| \\
&\qquad + \Big| \sum_{k=1}^{p} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t - I \Big|
\end{aligned}$$

On va s'intéresser à chacun des morceaux, cela nous donnera une condition sur n...
— Pour le premier morceau :

$$\left| \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k - x_{k-1}|\epsilon = \epsilon \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1}) = \epsilon(b - a)$$

— Pour le deuxième morceau :

$$\sum_{k=1}^{p} \left((x_k - x_{k-1}) f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \right)$$

on reconnait p fois le lemme d'Henstock appliquée aux fonctions $f_{N(t_k)}$.
Or on peut avoir plusieurs fois une même fonction $f_{N(t_k)}$ (si $N(t_k) = N(t_h)$), on les regroupe donc ainsi, on trouve :

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\left((x_k - x_{k-1})f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t\right)\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty}\sum_{N(t_k)=n}\left|(x_k - x_{k-1})f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty}\sum_{N(t_k)=n}\left|(x_k - x_{k-1})f_n(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_n(t)\mathrm{d}t\right|$$

Or d'après le lemme d'Henstock et d'après la définition de la jauge δ_n associée à $\frac{\epsilon}{2^n}$:

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\left((x_k - x_{k-1})f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t\right)\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{\epsilon}{2^n} = \frac{\epsilon}{2^{n_0}(1-\frac{1}{2})} \leqslant 2\epsilon$$

— Pour le troisième morceau :
Pour tout k, $N(t_k) \geqslant n_0$, donc $f_{n_0}(t) \leqslant f_{N(t_k)}(t) \leqslant f(t)$,

$$I - I_{n_0} = I - \int_a^b f_{n_0}(t)\mathrm{d}t = I - \sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{n_0}(t)\mathrm{d}t \geqslant I - \sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Donc

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t - I\right| \leqslant I - I_{n_0} \leqslant \epsilon$$

Donc pour tout subdivision δ-fine, $|S(f,\mathcal{P}) - I| \leqslant [(b-a)+2+1]\epsilon$.
Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est intégrable sur } [a,b] \text{ et que } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = I}$$

2. Sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

(a) Soit $b > 0$.

Remarques !
Sur $[a,b]$, $(f_{n|[a,b]})_n$ vérifie les conditions du théorème précédent...
Enfin, presque, on a un soucis pour la majoration de l'intégrale sur $[a,b]$, il nous faudrait enlever un terme dont on soit sûr qu'il est positive.
Comme f_n est croissante, on va considérer, non pas f_n directement, mais $f_n - f_0$ dont on est certain de la positivité.

On note donc $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}_+, t \mapsto f_n(t) - f_0(t)$. Alors
- $\forall\ x \in [a,b], \forall\ n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = f_n(x) - f_0(x) \leqslant f_{n+1}(x) - f_0(x) = g_{n+1}(x)$, par croissance de f_n sur $[a,+\infty[$ donc sur $[a,b]$.
  La suite (g_n) est croissante.
- $\forall\ x \in [a,b] \subset [a,+\infty[$, $\big(g_n(x)\big)_n = \big(f_n(x) - f_0(x)\big)_n \to f(x) - f_0(x)$
  Donc (g_n) est convergente vers une fonction $f - f_0 (\geqslant 0)$ sur $[a,b]$.
- Par relation de Chasles (avec reste) :

$$\int_a^b g_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (f_n - f_0) = \underbrace{\int_a^{+\infty}(f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t}_{\leqslant M} - \underbrace{\int_a^{+\infty}(f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} \leqslant M$$

  Donc la suite $\left(\int_a^b g_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M.

On peut appliquer le résultat des questions précédentes :

$$\boxed{\text{On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à } ((f_n - f_0)_{|[a,b]})_n.}$$

(b) On peut alors affirmer que, <u>pour tout $b > 0$</u>, $f - f_0 = \lim(f_n - f_0)$ est intégrable sur $[a,b[$ et que $\displaystyle\int_a^b f(t) - f_0(t)\mathrm{d}t = \lim_n \int_a^b (f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t$.

Notons, $I_b = \lim_n \int_a^b (f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t$. Pour $b' > b$,

$$I_{b'} - I_b = \lim_n \int_a^{b'} (f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t - \lim_n \int_a^b (f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t = \int_b^{b'} \underbrace{(f_n - f_0)(t)}_{\geqslant 0} \mathrm{d}t \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale. Donc $(I_b)_{b\in\mathbb{R}}$ est une famille croissante.
Elle est par ailleurs bornée par M d'après la question précédente.
Donc (I_b) admet une limite pour $b \to \infty$. On la note I.
Enfin, d'après la définition de l'intégrale sur $[a, +\infty[$ (convergence pour $b \to \infty$) :

$f_n - f_0$ est KH-intégrable sur $[a, +\infty[$, et $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f - f_0)(t)\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} I_b$.

En additionnant, la fonction f_0 étant intégrable sur $[a, +\infty[$: f est intégrable.

et pour tout $b > a$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = I_b + \int_a^b f_0 \subset b \to +\infty \longrightarrow \lim I_b + \int_a^{+\infty} f_0(t)\mathrm{d}t$.

On en déduit le théorème de convergence monotone (Beppo Levi) sur tout intervalle de type $[a, +\infty[$.

$$\boxed{f = \lim f_n \text{ est intégrable sur } [a, +\infty[\text{ et } \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t}$$

B. Relation de récurrence

Soit $\alpha > 1$.

1. Fonction Zéta de Riemann.
   La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.

   $$\boxed{\text{Donc } \mathcal{D}_\zeta =]-1, +\infty[\text{ avec } \zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}$$

2. Soit $a > 0$. Fonction Gamma d'Euler.
   (a) Par comparaison classique, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{a+2}e^{-x} = 0$.
   Donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant M$, $x^{a+2}e^{-x} \leqslant 1$.

   $$\boxed{\text{Il existe } M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\, x \geqslant M,\ x^a e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}.}$$

   (b) Soit $\epsilon > 0$.
   Pour tout $x \geqslant b = \max(M, \frac{1}{\epsilon})$ et $c > b$,

   $$\int_b^c x^a e^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_b^c \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x}\right]_b^c = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \epsilon$$

   $$\boxed{\text{Pour tout } \epsilon > 0, \text{ il existe } b > 0 \text{ tel que } \forall\, c > b,\ \left|\int_b^c x^\alpha e^{-x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \epsilon}$$

   (c) Soit $b > 0$,

   Remarques !
   On a besoin d'un candidat I. Comme $x \mapsto x^a e^{-x} \geqslant 0$, on voit pouvoir proposer une limite I

   L'application $x \mapsto x^a e^{-x}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc sa primitive $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^a e^{-t}\mathrm{d}t$ est croissante.
   Soit $\epsilon = 1$, il existe b_1 tel que $\forall\, c > b_1$, $\left|\displaystyle\int_{b_1}^c x^a e^{-x}\mathrm{d}x\right| < 1$.
   Donc pour tout $c \geqslant b_1$,

   $$|F(c)| = \left|F(b_1) + \int_{b_1}^c x^a e^{-x}\mathrm{d}x\right| \leqslant |F(b_1)| + 1$$

   Ainsi F est majorée à partir d'un certain rang. Comme elle est croissante, elle est majorée.
   Par conséquent F admet une limite en $+\infty$

   $$\boxed{x \mapsto x^a e^{-x} \text{ est KH-intégrable sur } [0, +\infty[.}$$

On note, pour tout $a > 0$, $\Gamma(a+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-x}\mathrm{d}x$.

3. Etude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Soit $b > 0$.

   $$\boxed{u_n \text{ est continue donc KH-intégrable sur } [0,b].}$$

   Puis, on réalise un changement de variable $u = nx$ ($x \mapsto nx$ est $\mathcal{C}^1$-bijectif) :

   $$\boxed{\int_0^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{nb} \frac{1}{n^\alpha} u^\alpha e^{-u} \frac{\mathrm{d}u}{n} = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \times \int_0^{nb} x^\alpha e^{-x}\mathrm{d}x}$$

   Ici $N(\alpha, n) = \frac{1}{n^{\alpha+1}}$

   (b) Comme f est KH-intégrable sur $[0,+\infty[$, il en est donc de même de u_n et mieux :

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha+1}}}$$

4. Application du lemme de Beppo-Levi.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé), $U_{n+1}(x) - U_n(x) = u_{n+1}(x) = x^\alpha e^{-(n+1)x} > 0$.

   $$\boxed{\text{Donc la suite } (U_n) \text{ est croissante.}}$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé toujours).
   La suite $(u_n(x))_n$ est géométrique : $u_{n+1}(x) = e^{-x} u_n(x)$, de raison $e^{-x}(< 1$, pour $x > 0)$.

   $$\boxed{\text{Ainsi } \sum u_n(x) \text{ est convergente et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = x^\alpha \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x^\alpha}{e^x - 1}.}$$

   (c) On peut alors appliquer le théorème de Beppo-Levi sur l'intervalle (**doublement** ouvert) $]0,+\infty[$:

   $$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \int_{]0,+\infty[} \lim_{n\to+\infty} U_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\mathrm{d}x$$

   Comme la somme est finie (à droite), on peut intervertir :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{]0,+\infty[} u_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k^{\alpha+1}}$$

   $$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)}$$