Devoir surveillé n°9

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole ($*$) voire ($**$).
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème

Objectifs

Le but du problème est de réfléchir de manières variées sur ce que pourrait être des intégrales entières. Nous abordons deux stratégies différentes (et complémentaires) : la méthode de Stieltjes (préliminaires, partie I et partie II) et la méthode des distributions (parties III et IV). Ces deux familles de parties sont relativement indépendantes.

Notations

Conformément aux devoirs précédent, on note -*si la limite existe*- :

$$\forall\, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}x := \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} g(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t := \lim_{x\to+\infty}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

Préliminaire. Calcul de la limite d'une série

Dans cette partie, nous commençons par un peu de calcul.
On note pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n u_k$ et $K_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n v_k$.
Nous rappelons (et le redémontrerons en partie I) que la suite de somme partielle $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite divergente et que $H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ où γ est une constante appelé constante d'Euler .

1. Montrer rapidement (mais complétement) que la série de terme général v_n est convergente.
2. On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$ et $I_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}$.
   (a) En utilisant l'équivalent de H_n, donner un développement asymptotique à l'ordre 0 (en à $o(1)$) de P_{2n} (pour $n\to+\infty$).
   (b) Exprimer I_{2n} en fonction de P_{2n} et H_{2n}. En déduire un développement asymptotique à l'ordre 0 de I_{2n} (pour $n\to\infty$).
   (c) Donner une relation entre K_{2n} et P_{2n} et I_{2n} ?
   (d) En déduire la limite de (K_n)

I. Polynômes de Bernoulli et développement asymptotique de la série harmonique

1. Structure algébrique.
   (a) On note $\Psi : \mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}$, $P\mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.
   Montrer que Ψ est une forme linéaire.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\Psi_n = \Psi_{|\mathbb{R}_n[X]}$. On admet que Ψ_n est également une forme linéaire.
   (b) On note, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\Phi_n : \mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P\mapsto \frac{1}{n}P'$. On admet que Φ_n est linéaire.
   Calculer Ker Φ_n. En exploitant les dimensions, montrer que Φ_n est surjective.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que :
   $$\mathcal{B}_n : \text{Ker } \Psi_n \to \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad P\mapsto\Phi_n(P)$$
   est une application bijective.

2. En déduire qu'il existe une unique suite (B_n) de polynômes vérifiant :
   (a) $B_0 = 1$
   (b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = nB_{n-1}$
   (c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^1 B_n(x)\mathrm{d}x = 0$

Ces polynômes sont appelés Polynômes de BERNOULLI
et les nombres de $b_n = B_n(0)$ sont appelés nombres de BERNOULLI.

3. Calculer B_1, B_2, B_3 et B_4.
   Montrer que $b_3 = 0$ et $b_4 = -\frac{1}{30}$.
4. On admet la formule d'EULER-MACLAURIN démontrée dans la partie suivante :

Pour f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[a,b]$ (avec $a, b \in \mathbb{N}$) :
$$\sum_{h=a+1}^{b} f(h) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \sum_{r=0}^{k}\left[\frac{(-1)^{r+1}b_{r+1}}{(r+1)!}\left(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)\right)\right] + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b \overline{B_{k+1}}(t) f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$$
où $\overline{B_k} : t \mapsto B_k(t - \lfloor t \rfloor)$ (i.e : $\overline{B_k}$ est 1-périodique et égale à B_k sur $[0,1]$).

Appliquer la formule pour montrer que pour tout $n \to \infty$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

On admettra que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-4}\overline{B_3}(t)dt$ *existe et vaut une certaine valeur* $A \in \mathbb{R}_+ \ldots$

II. Intégrale de Stieltjes et formule d'Euler-Maclaurin

On considère $[a,b]$, un intervalle de $\mathbb{R}$.
On définit, pour toute fonction A définie sur $[a,b]$ et $\sigma = \big(([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2),\ldots,([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$, subdivision pointée de $[a,b]$, et pour tout $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$
la A-somme de STIELTJES :
$$S_A(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \times \big(A(x_k) - A(x_{k-1})\big)$$

Puis, on dit que
- f est A-R-intégrable sur $[a,b]$ si il existe $I \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta \in \mathbb{R}_+ \text{ (constant)}, \forall\, \sigma,\ \text{subdivision pointée de } [a,b]\ \delta\text{-fine},\quad |S_A(f,\sigma) - I| \leqslant \epsilon$$
- f est A-KH-intégrable sur $[a,b]$ si il existe $I \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+, \forall\, \sigma,\ \text{subdivision pointée de } [a,b]\ \delta\text{-fine},\quad |S_A(f,\sigma) - I| \leqslant \epsilon$$

On note alors ce nombre $I := \displaystyle\int_{[a,b]} f\mathrm{d}A$ (on admet qu'il est alors unique - *s'il existe*-)

1. Montrer que l'intégrale de KURZWEIL-HENSTOCK de f est un cas particulier de la KH-intégrale de STIELTJES de f.
2. On suppose que A est de classe $\mathcal{C}^2$.
   On démontre des résultat de type IPP dans un cadre très régulier. Ils seront généralisés en 4.
   On rappelle le théorème de Taylor-Lagrange :

Si h est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$, alors pour tout $x, t \in [a,b]$:
$\exists\, c \in]x,t[$ (ou $]t,x[$) tel que $h(x) = h(t) + (x-t)h'(t) + \cdots + \dfrac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!}h^{(p-1)}(t) + \dfrac{(x-t)^p}{p!}h^{(p)}(c)$

   (a) Montrer que f est A-KH-intégrable sur $[a,b]$, si et seulement si $f \times A'$ est KH-intégrable sur $[a,b]$.
   Puis montrer que $\displaystyle\int_{[a,b]} f\mathrm{d}A = \int_a^b f(t)A'(t)\mathrm{d}t$
   (b) On suppose toujours que A est de classe $\mathcal{C}^2$ et également que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, montrer alors que
$$\int_{[a,b]} f\mathrm{d}A = f(b)A(b) - f(a)A(a) - \int_a^b f'(t)A(t)\mathrm{d}t$$

3. On considère $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} 1$ (pour $\lfloor x \rfloor = 0$, on admet que $A(x) = 0$).

   On fixe pour les questions suivantes de 3., $X \in \mathbb{R}_+^*$, $N = \lfloor X \rfloor$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

   (a) Quelle relation entre A et $PE : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (PE = Partie Entière) ?

   (b) On note, alors

$$\begin{array}{rccl} \delta_X : & [0,X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{1}{3} & \text{si } t \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{3}(t - \lfloor t \rfloor) & \text{si } t \in \left] \lfloor t \rfloor, \lfloor t \rfloor + \frac{1}{2} \right] \\ \frac{1}{3}(\lfloor t \rfloor + 1 - t) & \text{si } t \in \left] \lfloor t \rfloor + \frac{1}{2}, \lfloor t \rfloor + 1 \right[\end{array} \right. \end{array}$$

   Montrer que δ_X est une jauge sur $[0,X]$ et que pour tout subdivision pointée σ, δ_X-fine, l'ensemble $[0,X] \cap \mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble des points de marquage de σ.

   (c) En déduire, pour tout subdivision pointée de $[0,X]$ δ_X-fine, notée σ,

$$S_A(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{N} f(k)$$

   (d) Montrer enfin que f est A-KH-intégrable sur $[0,X]$ et

$$\int_{[0,X]} f \mathrm{d}A = \sum_{k=1}^{N} f(k)$$

4. Intégration par parties pour la R-intégrale de Stieltjes.

   (a) On considère $\sigma = \big(([x_0,x_1],t_1)\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ une subdivision pointée de $[a,b]$.
   On lui associe $\overline{\sigma} = \big(([t_0,t_1],x_0)\dots([t_{n-1},t_n],x_{n-1}),([t_n,t_{n+1}],x_n)\big)$ avec $t_0 = a$ et $t_{n+1} = b$.
   Montrer que $\overline{\sigma}$ est également une subdivision pointée de $[a,b]$.

   (b) Simplifier le calcul $S_f(g,\sigma) + S_g(f,\overline{\sigma})$.

   (c) En déduire que si f est g-R-intégrable sur $[a,b]$,
   alors g est f-R-intégrable sur $[a,b]$, et $\displaystyle\int_{[a,b]} g\mathrm{d}f + \int_{[a,b]} f\mathrm{d}g = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

   (d) En reprenant les notations de la question 3, montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $X > 1$:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor X \rfloor} f(k) = A(X)f(X) - \int_0^X A(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

5. (*) Montrer la formule d'Euler-Maclaurin pour f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[a,b]$ (avec $a,b \in \mathbb{N}$) :

$$\sum_{h=a+1}^{b} f(h) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \sum_{r=0}^{k} \left[\frac{(-1)^{r+1} b_{r+1}}{(r+1)!} \left(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a) \right) \right] + \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_a^b \overline{B_{k+1}(t)} f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$$

   Les nombres b_r et les fonctions polynomiales $\overline{B_k}$ sont définis en fin de partie I.

III. Etude d'une suite de fonctions

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction f de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est à <u>support compact</u> s'il existe deux réels a et b vérifiant $a < b$ et $\forall\, x \notin [a,b]$, $f(x) = 0$.
On note $\mathcal{D}$, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.
Dans la première partie, on crée une fonction de $\mathcal{D}$, qui...
On considère

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } |x| \geqslant 1 \\ \exp\left(-\frac{x^2}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \end{array} \right. \end{array}$$

1. (a) Etudier les variations de $\varphi_{]-1,1[}$

(b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Tracer la représentation graphique de φ.

2. (a) Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_{]-1,1[}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et qu'il existe $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\, x \in]-1,1[$, $\varphi^{(k)}(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} e^{-x^2/(1-x^2)}$.
En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ non réduit à 0.

3. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathrm{d}t$ est un réel strictement positif.

Par la suite, on notera $\Phi = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathrm{d}t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\begin{array}{cccc} \varphi_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{n}{\Phi}\varphi(nx) \end{array}$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 1$ et $\varphi_n \in \mathcal{D}$.

Pour tout fonction f continue par morceaux et tout entier naturel non nul n, on pose

$$(f \star \varphi_n) : x \mapsto \int_R f(t)\varphi_n(x-t)\mathrm{d}t$$

5. Soit f une fonction continue par morceaux.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
On considère (x_p) une suite convergente vers x.
Encadrer $(f \star \varphi_n)(x_n) - (f \star \varphi_n)(x) - (x_n - x)(f \star \varphi_n')(x)$

(b) (*)En déduire que $f \star \varphi_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \star \varphi_n)'(x) = (f \star \varphi_n')(x)$

On admet que $f \star \varphi_n$ est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f \star \varphi_n)^{(k)} = (f \star \varphi_n^{(k)})$

IV. Distributions

On dit que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers la fonction ψ, noté $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$
si pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|\psi_n^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)| < \epsilon$
et si il existe $a > 0$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|x| > a \Longrightarrow \psi_n(x) = 0$.

On admet qu'il existe f bien choisie telle que $\psi_n = f \star \varphi_n$ (où φ_n est définie en III) vérifie $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$

On appelle distribution sur $\mathcal{D}$, toute application linéaire $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall\, \psi \in \mathcal{D}, \forall\, (\psi_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}, \qquad \psi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \psi \Longrightarrow T(\psi_n) \to T(\psi)$$

On note $\mathcal{D}'$, l'ensemble des distribution sur $\mathcal{D}$.

1. Montrer que si f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors T_f définie par :

$$\forall\, \psi \in \mathcal{D}, \qquad T_f(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(x)\mathrm{d}x$$

définit une distribution sur $\mathcal{D}$.

2. Soit $U : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Justifier que T_U définit une distribution sur $\mathcal{D}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application δ_a qui à tout $\psi \in \mathcal{D}$ associe $\psi(a)$ est une distribution.

4. Soit T une distribution sur $\mathcal{D}$, on définit la distribution dérivée T' par :

$$\forall\, \psi \in \mathcal{D}, \qquad T'(\psi) = -T(\psi')$$

(a) Justifier que T' est une distribution sur $\mathcal{D}$.

(b) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors $(T_f)' = T_{f'}$.

(c) Montrer que $T_U{}' = \delta_0$