Devoir surveillé n°9
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrement) selon la qualité des copies.

Problème

Préliminaire. Calcul de la limite d'une série

Dans cette partie, nous commençons par un peu de calcul.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $K_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

Nous rappelons (et le redémontrerons en partie I) que la suite de somme partielle $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite divergente et que $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.

1. La suite (u_n) est positive, décroissante, de limite nulle.
   Donc d'après le critère de Leibniz, la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ converge. /1

   $$\boxed{\text{C'est-à-dire exactement : la série de terme général } v_n \text{ est convergente.}}$$

2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$ et $I_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$.

   (a) On a, pour tout entier n :

   $$P_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}H_n$$

   /1

   $$\boxed{P_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\gamma + o(1)}$$

   (b) On a alors alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

   $$H_{2n} = \sum_{h=1}^{2n} \frac{1}{h} = \sum_{h\in\mathbb{N}_{2n}, h \text{ pair}} \frac{1}{h} + \sum_{h\in\mathbb{N}_{2n}, h \text{ impair}} \frac{1}{h} = P_{2n} + I_{2n}$$

   Donc /1,5

   $$\boxed{I_{2n} = H_{2n} - P_{2n} \quad \text{et} \quad I_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n) + \gamma + o(1) - \frac{1}{2}\ln n - \frac{\gamma}{2} + o(1) = \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma + o(1)}$$

   (c) On a par ailleurs, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: /1

   $$\boxed{K_{2n} = \sum_{h=1}^{2n} \frac{(-1)^h}{h} = \sum_{h\in\mathbb{N}_{2n}, h \text{ pair}} \frac{(-1)^h}{h} + \sum_{h\in\mathbb{N}_{2n}, h \text{ impair}} \frac{(-1)^h}{h} = P_{2n} - I_{2n}}$$

   (d) Donc

   $$K_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\gamma + o(1) - \frac{1}{2}\ln n - \ln 2 - \frac{1}{2}\gamma + o(1) = -\ln 2 + o(1)$$

   /1,5

   $$\boxed{\lim_{n\to\infty} K_n = -\ln 2}$$

I. Polynôme de Bernoulli et développement asymptotique de la série harmonique

1. Structure algébrique.

   (a) $\Psi : P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$ est bien une application à valeur dans $\mathbb{R}$,
   elle est linéaire (comme l'intégrale), /1

   $$\boxed{\text{Donc } \Psi \text{ une forme linéaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

   (b) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P \mapsto \frac{1}{n}P'$.

   $$P \in \text{Ker } \Phi_n \Longleftrightarrow \frac{1}{n}P' = 0 \Longleftrightarrow P' = 0 \Longleftrightarrow P \in \mathbb{R}_0[X]$$

   /1

   $$\boxed{\text{Ker } \Phi_n = \mathbb{R}_0[X] \text{ ensemble des polynômes constants}}$$

   Donc $\dim(\text{Ker } \Phi_n) = 1$.
   Et par théorème du rang : $\text{rg}(\Phi_n) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim \text{Ker } \Phi_n = n + 1 - 1 = n$.
   Par ailleurs, $\text{Im } \Phi_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\dim(\text{Im } \Phi_n) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.
   Donc, ces deux ensembles sont les mêmes : /1

   $$\boxed{\text{Im } \Phi_n = \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ et donc } \Phi_n \text{ est surjective.}}$$

   (c) Comme Ψ_n est une forme linéaire de sur $\mathbb{R}_n[X]$, Ker Ψ_n est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Ker Ψ_n est donc un espace vectoriel de dimension égale à $(n+1) - 1 = n$.
   Φ_n est surjective, donc pour tout $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe P tel que $T = \Phi_n(P)$.
   En prenant $\overline{P} = P - \Psi(P)1$, on a $\overline{P}' = P'$, donc $\Phi_n(\overline{P}) = \Phi_n(P) = T$.
   et $\Psi(\overline{P}) = \Psi(P) - \Psi(P)\Psi(1) = 0$ car $\Psi(1) = 0$.
   Donc $\mathcal{B}_n(\overline{P}) = T$. Donc : $\mathcal{B}_n$ est surjective.
   Pour des raisons de dimensions (égales, et égale à $n-1$) : /1,5

   $$\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est une application bijective}}$$

2. Les conditions imposent donc (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme de degré n.
   Puis, on a exactement : $\Psi(B_n) = 0$, donc $B_n \in \text{Ker } \Psi$ et $\Phi_n(B_n) = B_{n-1}$.
   Donc $\mathcal{B}_n(B_n) = B_{n-1}$.
   Par bijectivité, de $\mathcal{B}_n$ on a donc /2

   $$\boxed{\text{l'existence et l'unicité de la suite } (B_n) \text{ avec } \forall\, n \in \mathbb{N},\ B_n = \mathcal{B}_n^{-1} \circ \mathcal{B}_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ \mathcal{B}_1^{-1}(B_0) \text{ et } B_0 = 1}$$

Ces polynômes sont appelés Polynômes de Bernoulli
et les nombres de $b_n = B_n(0)$ sont appelés nombres de Bernoulli.

3. $B_1' = 1B_0 = 1$, donc $B_1 = X + \lambda_1$. Puis $\Psi(B_1) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} + \lambda_1 = 0$.Donc $B_1 = X - \frac{1}{2}$.
   $B_2' = 2B_1 = 2X - 1$, donc $B_2 = X^2 - X + \lambda_2$. Puis $\Psi(B_2) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \lambda_2 = 0$.
   Donc $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.
   $B_3' = 3B_2 = 3X^2 - 3X + \frac{1}{2}$, donc $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \lambda_3$.
   Puis $\Psi(B_3) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \lambda_3 = 0$. Donc $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$.
   $B_4' = 4B_3$, donc $B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 + \lambda_4$.
   Puis $\Psi(B_4) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \lambda_4 = 0$. Donc $B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$.
   Bilan : /2

   $$\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2},\ B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6},\ B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \underbrace{0}_{=b_3},\ B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 \underbrace{-\frac{1}{30}}_{=b_4}}$$

4. On admet la formule d'Euler-Maclaurin démontrée dans la partie suivante :

   Pour f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[a, b]$:
   $$\sum_{h=a}^{b} f(h) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \sum_{r=0}^{k} \left[\frac{(-1)^{r+1}b_{r+1}}{(r+1)!}\left(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)\right)\right] + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b \overline{B_{k+1}}(t)f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$$
   où $\overline{B_k} : t \mapsto B_k(t - \lfloor t \rfloor)$ (i.e : $\overline{B_k}$ est 1-périodique et égale à B_k sur $[0, 1]$).

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence simple et déjà faite en divers endroits) : $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}$.

Avec $a = 1$ et $b = n$ et $k = 3$, la formule d'Euler-Maclaurin donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} f(k) = 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + \sum_{r=0}^{2} \left[\frac{(-1)^{r+1} b_{r+1}}{(r+1)!} \left(f^{(r)}(n) - f^{(r)}(1) \right) \right] + \frac{(-1)^2}{3!} \int_1^n \overline{B_3}(t) f^{(3)}(t) \mathrm{d}t \\
&= \ln n - \ln 1 + 1 + \underbrace{\frac{-b_1}{1!}(\frac{1}{n} - 1)}_{r=0} + \underbrace{\frac{b_2}{2!}(\frac{-1}{n^2} + 1)}_{r=1} + \underbrace{\frac{-b_3}{3!}(\frac{2!}{n^3} - 2)}_{r=2} + \frac{1}{6} \int_1^n (-3!) \frac{\overline{B}_3(t)}{t^4} \mathrm{d}t \\
&= \ln n + (1 + b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3}) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{0}{n^3} - \int_1^n t^{-4} \overline{B_3(t)} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Par convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-4} \overline{B_3}(t) \mathrm{d}t$ (voir plus bas) et relation de Chasles *[/1,5]*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \underbrace{(1 + b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} - \int_1^{+\infty} t^{-4} \overline{B_3}(t) \mathrm{d}t)}_{=\gamma} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{0}{n^3} + \int_n^{+\infty} t^{-4} \overline{B_3(t)} \mathrm{d}t$$

Par ailleurs, $\overline{B_3}$ est 1-périodique, elle est maximale sur une période et continue sur cette période.

On note $M = \sup_{t \in [0,1]} |B_3|(t)$ (existe d'après le théorème de Weierstrass).

Et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\overline{B_3}(t)| \leqslant M$

Enfin,

$$\left| \int_n^{+\infty} t^{-4} \overline{B_3(t)} \mathrm{d}t \right| \leqslant M \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^4} \mathrm{d}t = \frac{M}{3n^3}$$

Donc

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - (\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}) \right| \leqslant \frac{M}{3n^3}$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - (\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}) = O(\frac{1}{n^3})$$

/2

$$\boxed{\text{Donc pour } n \to \infty, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O(\frac{1}{n^3})}$$

Remarques !

Il s'agit ici d'un raisonnement de seconde année.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^X t^{-4} \overline{B_3}(t) dt$ *admet une limite pour* $X \to +\infty$.

On note $M = \sup_{t \in [0,1]} |B_3|(t)$ *(existe d'après le théorème de Weierstrass).*

Et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\overline{B_3}(t)| \leqslant M$

On a alors $|t^{-4} \overline{B_3}(t)| \leqslant \dfrac{M}{t^4}$, *donc* $\displaystyle\int_1^X |t^{-4} \overline{B_3}(t)| dt$ *admet une limite pour* $X \to +\infty$,

et donc $\displaystyle\int_1^X t^{-4} \overline{B_3}(t) dt$ *admet une limite pour* $X \to +\infty$. *La convergence absolue implique la convergence*

II. Intégrale de Stieltjes et formule d'Euler-Maclaurin

1. En prenant $A : x \mapsto x$, on trouve la définition de l'intégrale de Kurzweil-Henstock de f. */1*

   $\boxed{\text{L'intégrale de Kurzweil-Henstock de } f \text{ est un cas particulier de l'intégrale de Stieltjes de } f \text{ (avec } A = \mathrm{id}_E).}$

2. On suppose que A est de classe $\mathcal{C}^2$,

   (a) On applique le théorème de Taylor-Lagrange pour A en $t = t_i$ et $x = x_i$ (une fois) et $x = x_{i-1}$ (une seconde fois) :

$$A(x_i) = A(t_i) + (x_i - t_i) A'(t_i) + \frac{(x_i - t_i)^2}{2} A''(c_i)$$

$$A(x_{i-1}) = A(t_i) + (x_{i-1} - t_i)A'(t_i) + \frac{(x_{i-1} - t_i)^2}{2}A''(d_i)$$

On soustrait ces deux termes :

$$A(x_i) - A(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})A'(t_i) + \frac{(x_i - t_i)^2}{2}A''(c_i) - \frac{(x_{i-1} - t_i)^2}{2}A''(d_i)$$

On a alors : /1

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(A(x_k) - A(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)A'(t_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left(\frac{(x_k - t_k)^2}{2}A''(c_k) - \frac{(x_{k-1} - t_k)^2}{2}A''(d_k)\right)$$

• La première somme est une somme de Riemann pour la fonction $x \mapsto f(x)A'(x)$,
elle KH-converge (vers $\int_{[a,b]} fA'$) si et seulement si $f \times A'$ est intégrable sur $[a,b]$ /1

• Et pour la seconde somme, avec $M_1 = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ et $M_2 = \sup_{t\in[a,b]} A''(t)$ (M_1 et M_2 existent car f et A'' continues sur $[a,b]$) :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left(\frac{(x_k - t_k)^2}{2}A''(c_k) - \frac{(x_{k-1} - t_k)^2}{2}A''(d_k)\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)| \left|\frac{(x_k - t_k)^2}{2}A''(c_k) - \frac{(x_{k-1} - t_k)^2}{2}A''(d_k)\right|$$

$$\leqslant \frac{M_1M_2}{2}\sum_{k=1}^{n}[(x_k - t_k)^2 + (x_{k-1} - t_k)^2] \leqslant \frac{M_1M_2}{2}\sum_{k=1}^{n}[|x_k - t_k| + |x_{k-1} - t_k|]\delta(t_k)$$

si σ est δ-fine, donc $[x_{k-1}, x_k] \subset [t_k - \frac{\delta(t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(t_k)}{2}]$.
Puis, comme : $|x_k - t_k| + |x_{k-1} - t_k| = x_k - t_k + t_k - x_{k-1} = x_k - x_{k-1}$, on trouve :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left(\frac{(x_k - t_k)^2}{2}A''(c_k) - \frac{(x_{k-1} - t_k)^2}{2}A''(d_k)\right)\right| \leqslant \frac{M_1M_2}{2}\max_{k\in\mathbb{N}_n}(\delta(t_k)) \times \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})$$

Et donc par télescopage, et comme $x_n = b$ et $x_0 = a$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left(\frac{(x_k - t_k)^2}{2}A''(c_k) - \frac{(x_{k-1} - t_k)^2}{2}A''(d_k)\right)\right| \leqslant \frac{M_1M_2}{2}\max_{k\in\mathbb{N}_n}(\delta(t_k)) \times (b-a)$$

Donc en prenant, pour ϵ fixé quelconque, $\delta : t \mapsto \dfrac{2}{M_1M_2 \max_{k\in\mathbb{N}_n}(\delta(t_k)) \times (b-a)}\epsilon$,
On trouve pour toute subdivision σ, δ-fine : la seconde somme plus petite que ϵ (quelconque). /3

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est } A\text{-KH-intégrable sur } [a,b], \text{ si et seulement si } f \times A' \text{ est KH-intégrable sur } [a,b]. \\ \text{Dans ce cas : } \displaystyle\int_{[a,b]} f\mathrm{d}A = \int_a^b f(t)A'(t)\mathrm{d}t \end{array}}$$

(b) On suppose que A est de classe $\mathcal{C}^2$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors $f \times A'$ et $A \times f'$ sont continues sur $[a,b]$ donc intégrables.
On peut appliquer le résultat précédent : $\displaystyle\int_{[a,b]} f\mathrm{d}A = \int_a^b f(t)A'(t)\mathrm{d}t$. Or

$$\int_{[a,b]} f\mathrm{d}A + \int_{[a,b]} f'(t)A(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} (f(t)A'(t) + f'(t)A(t))\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} (fA)'(t)\mathrm{d}t = f(b)A(b) - f(a)A(a)$$

Donc /1

$$\boxed{\int_{[a,b]} f\mathrm{d}A = f(b)A(b) - f(a)A(a) - \int_{[a,b]} f'(t)A(t)\mathrm{d}t}$$

3. On considère $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor} 1$ (pour $\lfloor x\rfloor = 0$, on admet que $A(x) = 0$).
On fixe pour les questions suivantes de 3., $X \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
(a) A est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout $x \geqslant 0$, avec $N = \lfloor x\rfloor$, on a

$$A(x) = \sum_{n=1}^{N} 1 = N = \lfloor x\rfloor = PE(x)$$

/1

$$\boxed{A = PE_{|\mathbb{R}^+}}$$

(b) On note, alors

$$\begin{array}{rcl} \delta_X : & [0,X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{1}{3} & \text{si } t \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{3}(t - \lfloor t \rfloor) & \text{si } t \in \left] \lfloor t \rfloor, \lfloor t \rfloor + \frac{1}{2} \right] \\ \frac{1}{3}(\lfloor t \rfloor + 1 - t) & \text{si } t \in \left] \lfloor t \rfloor + \frac{1}{2}, \lfloor t \rfloor + 1 \right[\end{array} \right. \end{array}$$

Comme, nous l'avons dans le cours, δ_X est une jauge de forçage sur $[0,X]$,
nécessairement si σ est δ_X-fine, alors les entiers de $[0,X]$ sont des points de marquage.
En effet, si par exemple $k \in \mathbb{N} \cap [0,X]$, n'est pas marquage,
alors il existe x_{i-1}, x_i et t_i tel que $k \in [x_{i-1}, x_i]$, et $t_i \neq k$.
Dans ce cas, $t_i < k$ ou $t_i > k$. Supposons, sans perte de généralité que $t_i > k$.
On a alors $t_i - \frac{1}{2}\delta_X(t_i) < x_{i-1} < k < t_i$.
Notons que pour tout $t \notin \mathbb{N}$, $0 < \delta(t) \leqslant \frac{1}{3}$, donc $t_i - \frac{1}{6} < k < t_i$ et donc $t_i < k + \frac{1}{6}$,
donc $\lfloor t_i \rfloor = k$ et précisément ici : $t_i \in [k, k + \frac{1}{2}[$
Ainsi $\delta_X(t_i) = \frac{1}{3}(t_i - k)$. Or par hypothèse $t_i - \frac{1}{2}\delta_X(t_i) < k$,
donc $\delta_X(t_i) > t_i - k$, i.e. $1 > 6$. Absurde. /2

$\boxed{\delta_X \text{ est une jauge sur } [0,X] \text{ et pour tout subdivision pointée } \sigma,\ \delta_X\text{-fine, } [0,X] \cap \mathbb{N} \subset \{t_i\}_\sigma}$

(c) Soit $\sigma = \big(([x_0,x_1],t_1), ([x_1,x_2],t_2), \ldots, ([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$, subdivision δ_X-fine.
Alors, d'après la question précédente, il existe $i_1, i_2, \ldots i_N$ tel que pour tout $h \in \mathbb{N}_N$, $t_{i_h} = h$.
Puis, pour $h \in \mathbb{N}_N$, $x_{i_h} \in]h, h+1[$, donc $A(x_{i_h}) = h$ et $x_{i_{h-1}} \in]h-1, h[$, donc $A(x_{i_{h-1}}) = h-1$.
alors que pout tout $j \notin \{i_1, \ldots i_N\}$, $A(x_j) = A(x_{j-1})$, car $t_j \notin \mathbb{N}$.
Donc

$$S_A(f,\sigma) = \sum_{h=1}^{N} f(t_{i_h})(h - (h-1)) + \sum_{j \notin \{i_1, \ldots i_h\}} f(t_j) \underbrace{(A(x_j) - A(x_{j-1})}_{=0} = \sum_{h=1}^{N} f(h)$$

/2

$$\boxed{\text{Pour tout subdivision pointée de } [0,X]\ \delta_X\text{-fine, notée } \sigma,\ S_A(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{N} f(k)}$$

(d) Notons $I = \sum_{k=1}^{N} f(k)$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une jauge δ_X
tel que pour tout subdivision σ δ_X-fine, $|S_A(f,\sigma) - I| = 0 < \epsilon$. /1

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est } A\text{-intégrable sur } [0,X] \text{ et } \int_{[0,X]} f \mathrm{d}A = \sum_{k=1}^{N} f(k).}$$

4. Intégration par parties pour l'intégrale de Stieljes.

(a) On considère $\sigma = \big(([x_0,x_1],t_1) \ldots ([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ une subdivision pointée de $[a,b]$.
Comme σ est une subdivision pointée, on a pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$.
On a donc $t_i \leqslant x_i \leqslant t_{i+1}$, pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$.
Et comme $t_0 = a \leqslant x_0$ et $t_{n+1} = b \geqslant x_n$. /1

$\boxed{\overline{\sigma} \text{ est également une subdivision pointée de } [a,b].}$

(b) On a alors

$$\begin{aligned} S_f(g,\sigma) + S_g(f,\overline{\sigma}) &= \sum_{k=1}^{n} g(t_k)[f(x_k) - f(x_{k-1})] + \sum_{k=0}^{n} f(x_k)[g(t_{k+1}) - g(t_k)] \\ &= \sum_{k=1}^{n} g(t_k)f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} g(t_k)f(x_{k-1}) + \sum_{k=0}^{n} f(x_k)g(t_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n} f(x_k)g(t_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} g(t_k)f(x_k) - \sum_{k=0}^{n} f(x_k)g(t_k) + \sum_{k=0}^{n} f(x_k)g(t_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n} g(t_k)f(x_{k-1}) \\ &= -f(x_0)g(x_0) + f(x_n)g(t_{n+1}) = -f(a)g(a) + f(b)g(b) \end{aligned}$$

/2

$$\boxed{S_f(g,\sigma) + S_g(f,\overline{\sigma}) = f(b)g(b) - f(a)g(a)}$$

(c) On suppose que f est g-R-intégrable sur $[a,b]$.
Soit $\epsilon > 0$,

il existe $\delta > 0$ (fixe) tel que pour toute subdivision σ', δ-fine, $\left|S_g(f,\sigma') - \int_{[a,b]} f\mathrm{d}g\right| < \epsilon$.

Soit $\sigma = \big(([x_0,x_1],t_1)\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$, une subdivision de $[a,b]$, δ-fine.
Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $t_i - \frac{\delta}{2} < x_{i-1} < t_i < x_i < t_i + \frac{\delta}{2}$.

Donc avec $t_0 = a$ et $t_{n+1} = b$ on trouve également : $x_i - \frac{\delta}{2} < t_i < x_i < t_{i+1} < x_i + \frac{\delta}{2}$
Ainsi $\overline{\sigma}$ est δ-fine également.

$$\left|S_f(g,\sigma) - \left(-\int_{[a,b]} f\mathrm{d}g - f(a)g(a) + f(b)g(b)\right)\right| = \left|S_f(g,\sigma) + f(a)g(a) - f(b)g(b) + \int_{[a,b]} f\mathrm{d}g\right|$$
$$= \left|-S_g(f,\overline{\sigma}) + \int_{[a,b]} f\mathrm{d}g\right| < \epsilon$$

d'après la question précédente (pour la première égalité) et car $\overline{\sigma}$ est δ-fine pour l'inégalité.
Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout σ, δ-fine, $|S_f(g,\sigma) - I| < \epsilon$

avec $I = -\int_{[a,b]} f\mathrm{d}g - f(a)g(a) + f(b)g(b)$. */2,5*

$$\boxed{\text{Donc } g \text{ est } f\text{-intégrable sur } [a,b], \text{ et } \int_{[a,b]} g\mathrm{d}f + \int_{[a,b]} f\mathrm{d}g = f(b)g(b) - f(a)g(a)}$$

Remarques !

En fait, il s'agit exactement d'une formule d'intégration par parties :

$$\int_{[a,b]} g\,df + \int_{[a,b]} f\,dg = \int_{[a,b]} gf' + \int_{[a,b]} fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Pour la question suivante cela donne :

$$\sum_{k=1}^{\lfloor X\rfloor} f(k) = \int_1^X f\,dA = A(X)f(X) - \underbrace{A(1)f(1)}_{=0} - \int_1^X A\,df = A(X)f(X) - \int_1^X A(t)f'(t)\,dt$$

(d) On reprend les notations de la question 3. On considère f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
D'après la question précédente et en reprenant la réponse au 3.(d).

$$\sum_{k=1}^{\lfloor X\rfloor} f(k) = \int_0^X f\mathrm{d}A = A(X)f(X) - \underbrace{A(0)f(0)}_{=0} - \int_0^X A\mathrm{d}f = A(X)f(X) - \int_0^X A(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

Et comme A est nulle sur $[0,1]$: */1,5*

$$\boxed{\text{Pour tout } X > 1 : \sum_{k=1}^{\lfloor X\rfloor} f(k) = A(X)f(X) - \int_0^X A(t)f'(t)\mathrm{d}t}$$

5. Considérons f, de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[a,b]$. Les (B_k) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
(mais en réalité, ils sont continues. Nous ne l'avons pas démontré et pas besoin...)
Soit $r \in \mathbb{N}^*$ avec $r \leqslant k+1$:

$$\int_{[a,b]} f^{(r-1)}\mathrm{d}\overline{B_r} = \overline{B_r}(b)f^{(r-1)}(b) - \overline{B_r}(a)f^{(r-1)}(a) - \int_{[a,b]} \overline{B_r}\mathrm{d}f^{(r-1)} = b_r(f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)) - \int_{[a,b]} \overline{B_r}f^{(r)}\mathrm{d}x$$

car $a,b \in \mathbb{N}$, donc par périodicité : $\overline{B_r}(b) = \overline{B_r}(a) = B_r(0) = b_r$.
On a alors, par propriété des polynômes de Bernoulli $\overline{B_{r+1}}' = (r+1)\overline{B_r}$:

$$\int_{[a,b]} f^{(r-1)}\mathrm{d}\overline{B_r} = b_r(f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)) - \int_{[a,b]} \frac{1}{r+1}\overline{B_{r+1}}'f^{(r)}\mathrm{d}x = b_r(f(b) - f(a)) - \frac{1}{r+1}\int_{[a,b]} f^{(r)}\mathrm{d}\overline{B_{r+1}}$$

On a donc

$$(-1)^r\frac{1}{r!}\int_{[a,b]} f^{(r-1)}\mathrm{d}\overline{B_r} - (-1)^{r+1}\frac{1}{(r+1)!}\int_{[a,b]} f^{(r)}\mathrm{d}\overline{B_{r+1}} = \frac{(-1)^r b_r}{r!}(f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a))$$

On peut additionner cette relation pour r de 1 à $k+1$, il y a un télescopage :

$$-\int_{[a,b]} f\mathrm{d}\overline{B_1} - (-1)^{k+2}\frac{1}{(k+2)!}\int_{[a,b]} f^{(k+1)}\mathrm{d}\overline{B_{k+2}} = \sum_{r=1}^{k+1}\frac{(-1)^r b_r}{r!}(f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a))$$

Notons alors que :

- $\displaystyle\int_{[a,b]} f^{(k+1)}\mathrm{d}\overline{B_{k+2}} = \int_{[a,b]} f^{(k+1)}\overline{B_{k+2}}'\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f^{(k+1)}(k+2)\overline{B_{k+1}}'\mathrm{d}x$
- le changement de variable $h=r-1$ dans la somme
- $\displaystyle\int_{[a,b]} f\mathrm{d}\overline{B_1} = \int_1^b f\mathrm{d}\overline{B_1} - \int_1^a f\mathrm{d}\overline{B_1}$
- Notons que $A(x)=\lfloor x\rfloor$ et que par 1-périodicité : $\overline{B_1}(x) = x-\lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}$, donc $A(x) = x-\frac{1}{2}-\overline{B_1}(x)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=a+1}^{b} f(k) &= \sum_{k=1}^{b} f(k) - \sum_{k=1}^{a} f(k) = \int_0^b f\mathrm{d}A - \int_0^a f\mathrm{d}A = \int_a^b f\mathrm{d}A = \int_a^b f(x)A'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)(1-\overline{B_1}'(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f\mathrm{d}\overline{B_1}\end{aligned}$$

/4

On obtient donc la formule d'Euler-Maclaurin pour f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[a,b]$:

$$\boxed{\sum_{k=a+1}^{b} f(k) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \sum_{r=0}^{k}\left[\frac{(-1)^{r+1}b_{r+1}}{(r+1)!}\left(f^{(r)}(b)-f^{(r)}(a)\right)\right] + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b \overline{B_{k+1}}(t)f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t}$$

Remarques !

D'une certaine façon, cette formule d'Euler-Maclaurin est la version discrète de la formule de Taylor

II. Etude d'une suite de fonctions

On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } |x|\geqslant 1 \\ \exp\left(-\frac{x^2}{1-x^2}\right) & \text{si } |x|<1\end{cases}\end{array}$$

1. (a) Par composition, comme $x\mapsto 1-x^2$ ne s'annule pas sur $]-1,1[$, $\varphi_{]-1,1[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Et pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\varphi'(x) = \frac{-(2x(1-x^2)-(-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}\exp\left(-\frac{x^2}{1-x^2}\right) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2}\underbrace{\exp\left(-\frac{x^2}{1-x^2}\right)}_{\geqslant 0}$$

Donc, par étude de signe directe : */1,5*

$$\boxed{\varphi_{]-1,1[} \text{ est croissante sur }]-1,0]\text{, puis décroissante sur } [0,1[}$$

(b) Nous avons vu que $\varphi_{]-1,1[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$
et est nulle sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, donc également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
Enfin :

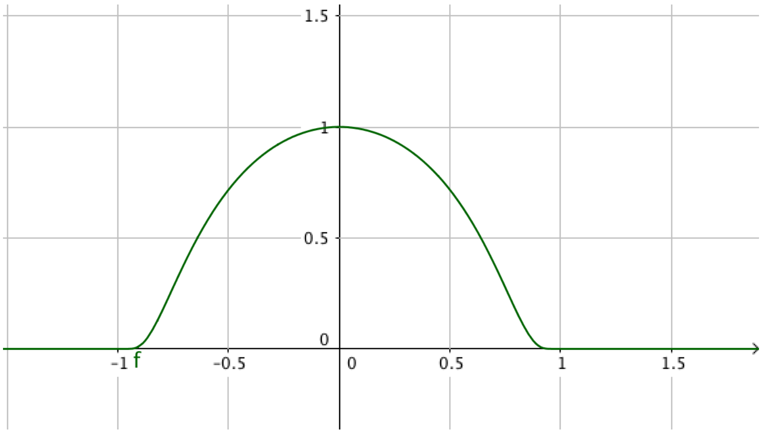
$$\frac{-2x}{[(1-x)(1+x)]^2}\exp\left(-\frac{x^2}{1-x^2}\right) \sim_{x\to-1^+} \frac{2}{2(1+x)^2}\exp(-\frac{1}{2(1+x)})$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+}\frac{-2x}{(1-x^2)^2}\exp\left(-\frac{x^2}{1-x^2}\right) = 0$$

a priori, c'est une forme indéterminée qui se lève par théorème du cours :
$\forall\, k\in\mathbb{N}$, $\lim_{u\to+\infty} u^k e^{-u} = 0$ (ici $u=\frac{1}{1+x}$, $k=1$).
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-1^-}\varphi'(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} 0 = 0$.
Donc d'après un théorème de cours (prolongement de classe $\mathcal{C}^1$), φ est également de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de -1.
Pour 1, soit on refait la même chose, soit on constate que φ est paire... */1,5*

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(c) On a la représentation graphique : /2



2. (a) Montrons par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathsf{P}_k : \text{« } \varphi_{]-1,1[} \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ et : } \exists\ P_k \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \forall\ x \in]-1,1[,\ \varphi(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} e^{-x^2/(1-x^2)} \text{ »}$$

— Le résultat est vrai pour $k = 0$ (et on l'a vu pour $k = 1$).

— Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que P_k est vraie.
Ainsi, la fonction $\varphi_{]-1,1[}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]-1,1[$ et il existe $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall\ x \in]-1,1[$,
$\varphi(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} e^{-x^2/(1-x^2)}$.
Par produit, comme $x \mapsto \dfrac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}}$ et $x \mapsto e^{-x^2/(1-x^2)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$,
$\varphi_{]-1,1[}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $]-1,1[$. On a alors, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi^{k+1}(x) = \left(\frac{P_k'(x)(1-x^2) - P(x) \times (2k)(-2x)}{(1-x^2)^{2k+1}} + \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^k} \times \frac{-2x}{(1-x^2)^2} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{1-x^2}\right)$$

$$\varphi^{k+1}(x) = \frac{P_{k+1}(x)}{(1-x^2)^{2k+2}} \exp\left(-\frac{x^2}{1-x^2}\right)$$

avec $P_{k+1} = (1-X^2)^2 P_k' + 4kX(1-X^2)P_k - 2XP_k$, qui est bien un polynôme.
Ainsi, P_{k+1} est vraie.

Donc $\varphi_{]-1,1[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et évidemment, $\varphi_{]-\infty,-1[}$ et $\varphi_{]1,+\infty[}$ également.
Et par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} = \lim_{x\to 1^-} \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} \exp\left(\frac{-x^2}{1-x^2}\right) = 0$,
pour les mêmes raisons qu'en question 1.(b).
Puis, par parité on peut affirmer que : /2,5

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(b) $\mathcal{D}$ est non vide, puisque φ en fait partie.
Soient $f, g \in \mathcal{D}$, de support compact respectivement $[a,b]$ et $[c,d]$
et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est à support compact : $\emptyset$ ou bien $[\max(a,c), \min(b,d)]$.
et de même $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Donc /1

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{R} \text{ non réduit à } 0.}$$

3. Pour tout $a < -1$ et $b > 1$,

$$\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \exp -\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

C'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[-1,1]$, cela donne un nombre finie.
On passe alors aux limites ($a \to -\infty$ et $b \to +\infty$), c'est invariant ici : /1

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathrm{d}t \text{ est un réel strictement positif.}}$$

4. φ_n est elle-même une fonction à support compact,

$$\forall\ x \geqslant \frac{1}{n}, \varphi_n(x) = \varphi(nx) = 0 \qquad \forall\ x \leqslant -\frac{1}{n}, \varphi_n(x) = \varphi(nx) = 0$$

Et donc, pour tout $a \leqslant -\frac{1}{n}$, tout $b \geqslant \frac{1}{n}$,

$$\int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\Phi}\int_a^b n\varphi(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\Phi}\int_{-1}^1 \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$$

en posant $u = nx$ de classe $\mathcal{C}^1$, donc $\mathrm{d}u = n\mathrm{d}x$ /1

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 1.}$$

5. Soit f une fonction continue par morceaux.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On considère (x_p) une suite convergente vers x.
   Par linéarité de l'intégrale

$$(f\star\varphi_n)(x_p)-(f\star\varphi_n)(x)-(x_p-x)(f\star\varphi_n')(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\big[\varphi_n(x_p-t)-\varphi_n(x-t)-(x_p-x)\varphi'(x-t)\big]\mathrm{d}t$$

   Soit $t \in \mathbb{R}$, comme $x_p - t \to x - t$ et que φ_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$,
   on peut appliquer le théorème de Taylor avec reste intégrale :

$$\begin{aligned}\varphi_n(x_p-t) &= \varphi_n(x-t) + \big((x_p-t)-(x-t)\big)\varphi_n'(x-t) + \int_{x-t}^{x_p-t} \frac{(x_p-t-u)}{1!}\varphi_n^{(2)}(u)\mathrm{d}u \\ &= \varphi_n(x-t) + \big((x_p-x)\big)\varphi_n'(x-t) + \int_{x-t}^{x_p-t} (x_p-t-u)\varphi_n^{(2)}(u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

/1

$$\begin{aligned}\Big|\varphi_n(x_p-t)-\varphi_n(x-t)-(x_p-x)\varphi_n'(x-t)\Big| &\leqslant \left|\int_{x-t}^{x_p-t} (x_p-t-u)\varphi_n^{(2)}(u)\mathrm{d}u\right| \\ &\leqslant \int_{x-t}^{x_p-t} |x_p-t-u|\left|\varphi_n^{(2)}(u)\right|\mathrm{d}u\end{aligned}$$

   On pose $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n^{(2)}| = \sup_{[-1,1]} |\varphi^{(2)}|$, qui existe bien car $\varphi^{(2)}$ donc $|\varphi^{(2)}|$ est continue sur le compact $[-1,1]$. Puis, on réalise le changement de variable $s = t+u$ ($t \mapsto t-u$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme)

$$\begin{aligned}\Big|\varphi_n(x_p-t)-\varphi_n(x-t)-(x_p-x)\varphi_n'(x-t)\Big| &\leqslant M_2\int_{x-t}^{x_p-t} |x_p-t-u|\,\mathrm{d}u = M_2\int_x^{x_p}|x_p-s|\mathrm{d}s \\ &\leqslant M_2\int_x^{x_p}(x_p-s)\mathrm{d}s = \frac{M_2}{2}(x_p-x)^2\end{aligned}$$

   Puis, par linéarité de l'intégrale :

$$|(f\star\varphi_n)(x_p)-(f\star\varphi_n)(x)-(x_p-x)(f\star\varphi_n')(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\Big(\varphi_n(x_p-t)-\varphi_n(x-t)-(x_p-x)\varphi_n'(x-t)\Big)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\Big|\varphi_n(x_p-t)-\varphi_n(x-t)-(x_p-x)\varphi_n'(x-t)\Big|\mathrm{d}t$$

/1

$$\boxed{|(f\star\varphi_n)(x_p)-(f\star\varphi_n)(x)-(x_p-x)(f\star\varphi_n')(x)| \leqslant \frac{M_2}{2}(x_p-x)^2\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\mathrm{d}t}$$

   (b) On a donc en divisant par $x_p - x$:

$$\left|\frac{f\star\varphi_n)(x_p)-(f\star\varphi_n)(x)}{x_p-x} - (f\star\varphi_n')(x)\right| \leqslant \frac{M_2}{2}(x_p-x)\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\mathrm{d}t \underset{x_p\to x}{\longrightarrow} 0$$

   Ainsi, comme ceci est vrai pour toute suite $(x_p) \to x$: /2

$$\boxed{f\star\varphi_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R},\ (f\star\varphi_n)'(x) = (f\star\varphi_n')(x)}$$

IV. Distributions

1. Soit $(\psi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$.
   On note a tel que pour tout $|x| > a$, $\psi_n(x) = 0$.
   En passant à la limite, on a le même résultat pour ψ.
   Donc $T_f(\psi_n) = \displaystyle\int_{-a}^a f(x)\psi(x)\mathrm{d}x$.

Soit $\epsilon > 0$. Notons $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{\int_{-a}^{a}|f|}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|\psi_n^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)| < \epsilon'$.
Puis, pour tout $n \geqslant N$,

$$|T_f(\psi_n) - T_f(\psi)| = \left|\int_{-a}^{a} f(t)(\psi_n(t) - \psi(t))\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-a}^{a}|f(t)|\epsilon'\mathrm{d}t \leqslant \epsilon$$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc si } f \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}, \text{ alors } T_f \text{ définit une distribution sur } \mathcal{D}.}$$

2. U est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc d'après la question précédente : */0,5*

$$\boxed{U \text{ définit une distribution sur } \mathcal{D}.}$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère δ_a qui à tout $\psi \in \mathcal{D}$ associe $\psi(a)$ est une distribution.
Toujours avec les notations de la question 1. Pour tout $n \geqslant N$:

$$|\delta_a(\psi_n) - \delta_a(\psi)| = |\psi_n(a) - \psi(a)| < \epsilon$$

/1

$$\boxed{\text{Donc } \delta_a \text{ est bien une distribution sur } \mathcal{D}}$$

4. Soit T une distribution sur $\mathcal{D}$, on définit la distribution dérivée T' par :

$$\forall\, \psi \in \mathcal{D}, \qquad T'(\psi) = -T(\psi')$$

(a) Soit Soit $(\psi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$.
Toujours avec la même notation :
$\psi = 0$ sur $]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[\implies \psi' = 0$ sur $]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$.
Et par ailleurs, $(\psi_n')^{(k)} = \psi_n^{k+1}$. Donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant N, \forall\, x \in \mathbb{R}, |(\psi_n')^{(k)} - (\psi')^{(k)}| = |\psi_n^{(k+1)}(x) - \psi^{(k+1)}(x)| < \epsilon$$

Ainsi $(\psi_n') \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi'$ et comme T est une distribution :

$$T'(\psi_n) = -T(\psi_n') \to -T(\psi') = T'(\psi)$$

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, } T' \text{ est une distribution sur } \mathcal{D}.}$$

(b) Toujours avec les mêmes notations, on peut faire une intégration par parties sur le compact $[-a, a]$.
Pour tout $\psi \in \mathcal{D}$:

$$T_f{}'(\psi) = -T_f(\psi') = -\int_{-a}^{a} f(t)\psi'(t)\mathrm{d}t = -[f(t)\psi(t)]_{-a}^{a} + \int_{-a}^{a} f'(t)\psi(t)\mathrm{d}t = T_{f'}(\psi)$$

Ceci est vrai pour tout $\psi \in \mathcal{D}$. */1*

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ alors } (T_f)' = T_{f'}.}$$

(c) Soit $\psi \in \mathcal{D}$

$$(T_u)'(\psi) = -T_u(\psi') = \int_0^a \psi'(t)\mathrm{d}t = -\psi(a) + \psi(0) = \psi(0) = \delta_0(\psi)$$

Ceci est vrai pour tout $\psi \in \mathcal{D}$. */1*

$$\boxed{T_U{}' = \delta_0}$$

Remarques !
Ces deux dernières parties s'inspirent du sujet Centrale PC 2015.
Si vous voulez en connaître plus, je vous conseille de vous y référer.