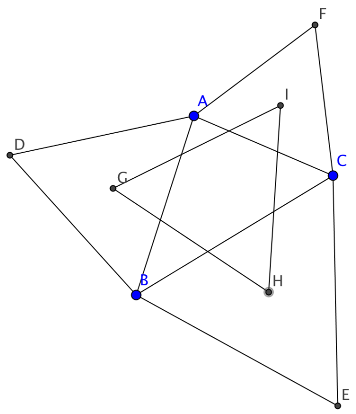
Devoir à la maison n°4
CORRECTION

Exercice

1.



2. Soient X, Y et Z trois points du plan.
XYZ est équilatéral $\iff r(X) = Y$, où r est la rotation de centre Z et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
$\iff y - z = e^{\imath\pi/3}(x - z)$.
3. Le triangle ADB est équilatéral,
donc $d - b = e^{\imath\pi/3}(a - b)$, mais aussi $a - d = e^{\imath\pi/3}(b - d)$.
G est le centre de ce triangle, donc $3g = a + b + d$,
On a donc $3(a-g) = 3a-3g = (a-a)+(a-b)+(a-d) = (a-b)+(a-d) = (a-b)+e^{\imath\pi/3}(b-d)$.
Alors que $3j(b - g) = j(3b - 3g) = j(b - a + b - d) = j(b - a) + j(b - d)$.
Donc :
$$3[(a - g) - j(b - g)] = [1 + j](a - b) - [e^{\imath\pi/3} - j](d - b)$$
Par ailleurs $j + 1 = e^{\imath\pi/3}$, donc
$$3[(a - g) - j(b - g)] = e^{\imath\pi/3}(a - b) - (d - b) = 0$$
d'après la première équation.
On a donc $(a - g) - j(b - g) = 0$.
Et on retrouve les mêmes résultats en permutant (dans l'ordre) $[A, B, D, G] \to [B, C, E, H]$ et $[A, B, D, G] \to [C, A, F, I]$. Donc :
$$\boxed{j(b - g) = (a - g) \quad j(c - h) = (b - h) \quad j(a - i) = (c - i)}$$
Ce n'est pas très malin, le nombre i qui apparait ici est l'affixe de I. A ne pas confondre avec $\imath$ tel que $\imath^2 = -1\ldots$
4. $(1 - j)g = a - jb$, $(1 - j)h = b - jc$ et $(1 - j)i = c - ja$.
$$j^2(1-j)g = j^2(a-jb) = j^2a-b = j^2a-(1-j)h-jc = -(1-j)h-j(c-ja) = -(1-j)h-j(1-j)i$$
En divisant par $1 - j$, on obtient :
$$\boxed{j^2g + ji + h = 0}$$
Comme $1 + j + j^2 = 0$, on a donc $j^2 = -1 - j$ et donc
$$j(i - g) + (h - g) = 0 \Rightarrow (h - g) = (-j)(i - g) = e^{-\imath\pi/3}(i - g)$$
Donc
$$\boxed{\text{le triangle } GIH \text{ est équilatéral (indirect)}}$$

5. Le centre de gravité de GHI a pour affixe

$$g+h+i = \frac{1}{1-j}(a - jb + b - jc + c - ja) = a+b+c$$

Donc

$$\boxed{\text{les centres de gravité des triangles } ABC \text{ et } GHI \text{ coïncident}}$$

6.

$$\boxed{\text{Ce théorème est classiquement attribué à Napoléon Bonaparte}}$$

Problème : Limite sup et Limite inf d'une suite (u_n)

Dans tout le problème, on fixe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on suppose bornée.

1. Supposons que $A \subset B$.
   Alors $\forall\, x \in A$, $x \in B$, donc $x \leqslant \sup(B)$.
   Par conséquent, $\sup B$ est un majorant de A, donc

$$\boxed{\sup(A) \leqslant \sup(B)}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $X_n = \{u_p, p \geqslant n\}$.
   X_n est non vide, bornée car (u_n) est bornée. Donc

$$\boxed{X_n \text{ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans } \mathbb{R}.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $X_{n+1} \subset X_n$ car $X_n = X_{n+1} \cup \{u_n\}$.
   Donc d'après la première question $s_{n+1} = \sup(X_{n+1}) \leqslant \sup X_n = s_n$.
   On a également $\inf X_{n+1} \geqslant \inf X_n$, donc $i_{n+1} \geqslant i_n$. Donc

$$\boxed{\text{la suite } (s_n) \text{ est décroissante et la suite } (i_n) \text{ est croissante.}}$$

   (c) Il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p \geqslant m$.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \geqslant m$.
   Ainsi la suite (s_n) est décroissante et minorée, donc elles convergent.
   De même (i_n) est croissante et majorée.

$$\boxed{\text{Ainsi les suites } (s_n) \text{ et } (i_n) \text{ sont convergentes.}}$$

   On note $L_s = \lim(s_n) = \limsup u$ et $L_i = \lim(i_n) = \liminf u$.

3. Déterminer les suites (s_n) et (i_n) ainsi que leurs limites L_s et L_i dans chacun des cas suivants :
   (a) Si $u_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{\text{Dans ce cas, pour tout } n \in \mathbb{N},\ s_n = i_n = 0 \text{ et } L_s = L_i = 0}$$

   (b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall\, p \geqslant n$, $u_p \leqslant 1$ et $u_{2p} = 1$, donc $s_n = 1$.
   De même pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_n = -1$.

$$\boxed{\text{Dans ce cas, pour tout } n \in \mathbb{N},\ s_n = 1 = L_s \text{ et } i_n = -1 = L_i}$$

   (c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$.
   (u_n) est décroissante, donc $\forall\, p \geqslant n$, $u_p \leqslant u_n = \frac{1}{n+1}$. Donc $s_n = \frac{1}{n+1}$.
   (u_n) est décroissante de limite nulle, donc $\inf X_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $i_n = 0$.

$$\boxed{\text{Dans ce cas, pour tout } n \in \mathbb{N},\ s_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } i_n = 0 = L_i = L_s}$$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $i_n \leqslant u_n \leqslant s_n$.
   Supposons que $L_s = L_i = \ell$. Soit $\epsilon > 0$.
   Il existe N_1 tel que $\forall\, n \geqslant N_1$, $s_n - \ell < \epsilon$ ((s_n) est décroissante).
   Il existe N_2 tel que $\forall\, n \geqslant N_2$, $\ell - i_n < \epsilon$ ((i_n) est croissante).
   Donc $\forall\, n \geqslant N = \max(N_1, N_2)$, $-\epsilon < i_n - \ell < u_n - \ell < s_n - \ell < \epsilon$, donc $|u_n - \ell| < \epsilon$.
   Ainsi,

$$\boxed{\text{si } L_s = L_i, \text{ la suite } (u_n) \text{ est convergente (et de limite } \ell = L_s = L_i).}$$

(b) Soit $\epsilon > 0$. On note $\ell' = \lim(v_n)$.
Il existe N tel que $\forall\ n \geqslant N$, $|v_n - \ell'| = |u_{\varphi(n)} - \ell| < \epsilon$.

$$\forall\ n \geqslant N, \qquad u_{\varphi(n)} - \epsilon < \ell' < u_{\varphi(n)} + \epsilon$$

$$\forall\ n \geqslant N, \qquad i_{\varphi(n)} - \epsilon < \ell' < s_{\varphi(n)} + \epsilon$$

Puis en faisant tendre n vers l'infini (inégalité sur les suites) :

$$\forall\ \epsilon > 0 \qquad \ell' < L_s + \epsilon \qquad \text{et} \qquad \ell' > L_i - \epsilon$$

Ceci est équivalent (équivalence vue en cours) :

$$\boxed{L_i \leqslant \ell' = \lim(v_n) \leqslant L_s}$$

(c) Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\ n \geqslant N \qquad |u_n - \ell| < \epsilon \Longleftrightarrow \ell - \epsilon < u_n < \ell + \epsilon$$

Donc

$$\forall\ n \geqslant N, \forall\ p \geqslant n \qquad \begin{cases} u_p < \ell + \epsilon \Rightarrow s_n < \ell + \epsilon \\ u_p > \ell - \epsilon \Rightarrow i_n > \ell - \epsilon \end{cases}$$

En passant à la limite :

$$\forall\ \epsilon > 0 : L_s < \ell + \epsilon \qquad L_i > \ell + \epsilon$$

Cela est équivalent à $L_s \leqslant \ell$ et $L_i \geqslant \ell$.
Mais on sait aussi d'après la question précédente ((v_n) existe toujours d'après Bolzano-Weierstrass ou on refait la démonstration) que $L_i \leqslant L_s$.
Tout ceci n'est possible que si, nécessairement,

$$\boxed{L_s = L_i = \ell}$$

5. L'exemple 3.c (dans le cas de (i_n)), montre qu'il n'est pas toujours possible de trouver un terme $u_\varphi(n)$ qui vaut s_n, car s_n peut être directement égal à sa limite, sans qu'aucun terme de (u_n) ne le soit...
On va chercher à créer une suite $(u_{\varphi(n))}$ tel que φ croissante et $|u_{\varphi(n)} - L_s| \leqslant \frac{1}{n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\varphi(n-1) \in \mathbb{N}$ donné.

$$L_s = \lim(s_n) \Rightarrow \exists\ N \mid \forall\ p \geqslant N, |s_p - L_s| < \frac{1}{2n} \qquad \text{avec } \epsilon = \frac{1}{n}$$

Soit $p = \max(N, \varphi(n-1)+1)$, donc $p \geqslant N$.

$$s_p = \sup\{u_k, k \geqslant p\} \qquad \text{Donc : } \exists\ k_0 \geqslant p \mid |u_{k_0} - s_p| < \frac{1}{2n}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire :

$$\exists\ k_0 \geqslant p \geqslant \varphi(n-1)+1 \qquad |u_{k_0} - L_s| \leqslant |u_{k_0} - s_p| + |s_p - L_s| \leqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

Prenons $\varphi(n) = k_0$, on a donc φ croissante strictement et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - L_s| \leqslant \frac{1}{n}$.
On a ainsi crée (théorème de convergence par encadrement) :

$$\boxed{\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite extraite de } (u_n) \text{ qui converge vers } L_s}$$