MPSI 3 - Fermat　　　　Le 21.09.18
2018-2019

Devoir surveillé n°1
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrment) selon la qualité des copies.

Problème. Autour des polynômes à coefficients entiers

A. Localisation des racines

1. Recherche d'une racine évidente entière.

(a) Soit $x_0 \in \mathbb{Z}$ une racine de f, alors

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_0 = -a_1 x_0 - \cdots - a_n x_0^n = x_0 \times (-a_1 - a_2 x_0 - \cdots - a_n x_0^{n-1})$$

Or $a_1, \dots a_n, x_0 \in \mathbb{Z}$, donc par stabilité ($\mathbb{Z}$ est un anneau) : $-a_1 - a_2 x_0 - \cdots - a_n x_0^{n-1} \in \mathbb{Z}$ *\/1*

$$\boxed{\text{si } x_0 \in \mathbb{Z} \text{ est une racine de } f, \text{ alors } x_0 \text{ divise } a_0}$$

(b) $105 = 3 \times 5 \times 7$, donc 105 est divisible par $1, 3, 5, 7, 15, 21, 35$ et 105 et leurs opposés.
On essaye avec 3, cela ne marche pas mais :

$$5^3 + 5 \times 5^2 - 29 \times 5 - 105 = 125 + 125 - 145 - 105 = 0$$

$$(-3)^3 + 5 \times (-3)^2 - 29 \times (-3) - 105 = -27 + 45 + 87 - 105 = 0$$

$$(-7)^3 + 5 \times (-7)^2 - 29 \times (-7) - 105 = -343 + 245 + 203 - 105 = 0$$

Donc *\/2*

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x^3 + 5x^2 - 29x - 105 = (x+3)(x-5)(x+7)}$$

Remarques !
On aurait également pu trouver une racine, factoriser, puis exploiter un déterminant (ou chercher une nouvelle racine « évidente »)...

2. Encadrement des racines par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

A la première lecture...
Ces deux premiers questions semblent avoir été faites en cours...

(a) Soient $(x_1, \dots x_n), (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$.

i. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$0 \leqslant (x_i y_j - x_j y_i)^2 = x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2 x_i x_j y_i y_j$$

On en déduit *\/1*

$$\boxed{\forall\, i < j \in [\![1, n]\!], \qquad 2 x_i x_j y_i y_j \leqslant x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 y_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i x_j y_j \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i^2 y_j^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 - \sum_{i \neq j} x_i y_i x_j y_j \\
&= \sum_{i<j} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2) - 2 \sum_{i<j} x_i y_i x_j y_j \geqslant 0
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité précédente. Donc $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.
On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz : /2

$$\boxed{\forall\ (x_1,\dots x_n),(y_1,\dots y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Remarques !
Comme le terme de droite est nécessairement positif, on peut prendre la racine carrée.
Et on obtient la véritable inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall\ (x_1,\dots x_n),(y_1,\dots y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

(b) On suppose que f se factorise sur $\mathbb{C}$ de la façon suivante :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n(x-y_1)\dots(x-y_{n-1})(x-y_n)$$

i. Si on développe le polynôme $a_n(x-y_1)\dots(x-y_{n-1})(x-y_n)$, on trouve

$$a_n x^n - a_n(y_1+y_2+\dots+y_n)x^{n-1} + a_n(\sum_{i<j} y_i y_j)x^{n-1} + \dots$$

On peut identifier (écriture unique) car il y a une égalité polynomiale pour une infinité de réels x.
Donc en divisant par a_n : /1

$$\boxed{y_1+y_2+\dots+y_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}$$

ii. De même, si on regarde le troisième coefficient (cas $j=n$) : $a_{n-2} = a_n \sum_{i<j} y_i y_j$. Donc /1

$$\boxed{(y_1+\dots y_{n-1})y_n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} y_i y_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}}$$

iii. On a alors

$$\begin{aligned}
a_{n-1}^2 &= a_n^2(y_1+y_2+\dots+y_n)^2 = a_n^2\left[(y_1+\dots+y_{n-1})^2 + y_n^2 + 2y_n(y_1+\dots y_{n-1})\right] \\
&= a_n^2(y_1+\dots+y_{n-1})^2 + a_n^2 y_n^2 + 2a_{n-2}a_n - 2a_n^2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} y_i y_j \\
&= a_n^2 \sum_{i=1}^{n-1} y_1^2 + 2a_n^2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} y_i y_j + a_n^2 y_n^2 + 2a_{n-2}a_n - 2a_n^2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} y_i y_j
\end{aligned}$$

Ainsi /2

$$\boxed{a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n - a_n^2 y_n^2 = a_n^2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}$$

iv. D'après la question (b)i., $(\frac{a_{n-1}}{a_n} + y_n)^2 = (-y_1-y_2-\dots-y_{n-1})^2 = (\sum_{i=1}^{n-1} y_i)^2$.
On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(y_1, y_2 \dots y_{n-1})$ et $(1,1,\dots 1)$: /1

$$(\frac{a_{n-1}}{a_n} + y_n)^2 = (\sum_{i=1}^{n-1} y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \sum_{i=1}^{n-1} 1^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

Puis tenant compte de la réponse à la question précédente (en multipliant par a_n^2) : /1

$$\boxed{(a_{n-1}+a_n y_n)^2 \leqslant (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2} - a_n^2 y_n^2)}$$

v. On trouve donc l'inégalité quadratique suivante vérifiée par $Y = a_n y_n$:

$$Y^2 + (n-1)Y^2 + 2a_{n-1}Y + a_{n-1}^2 + 2(n-1)a_{n-2} - (n-1)a_{n-1}^2 \leqslant 0$$

En divisant tout par n : /1

$$Y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}Y + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} + \frac{2-n}{n}a_{n-1}^2 \leqslant 0$$

Considérons le polynôme du second degré $P(x) = x^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}x + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} + \frac{2-n}{n}a_{n-1}^2$.
Alors nous venons de montrer que $P(Y) \leqslant 0$.
Or comme le coefficient devant x^2 est positif, on a
$P(Y) \leqslant 0$ si et seulement si Y est situé entre les deux racines de P. /2
Celles-ci se calculent ; le discriminant de P est

$$\Delta = 4\left(\frac{a_{n-1}^2}{n^2} - \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} + \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2\right) = 4\left(\frac{(n-1)^2}{n^2}a_{n-1}^2 - \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2}\right)$$
$$= \frac{4(n-1)^2}{n^2}\left(a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}\right)$$

Donc les racine de P sont de la forme /1

$$\frac{-\frac{2a_{n-1}}{n} \pm \sqrt{4\frac{(n-1)^2}{n^2}\left(a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}\right)}}{2}$$

Donc

$$\boxed{\frac{y_n}{a_n} \in \left[-\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}} ; -\frac{a_{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}\right]}$$ /1

Remarques !
Ce résultat a été démontré par le mathématicien français EDMOND LAGUERRE *(1834-1886). Il permet de localiser les racines d'un polynôme et de ne pas chercher ≪ trop loin ≫lorsqu'on vise une racine par tâtonnement.*

B. Images entières

1. Observations

(a) Soit f une application polynomiale à coefficients entiers.
On peut supposer que $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{Z}$.
Soit $m \in \mathbb{Z}$, $f(m) = \sum_{k=0}^{n} a_k m^k$, par stabilité de $\mathbb{Z}$ par addition et multiplication. /1

$$\boxed{\forall\, m \in \mathbb{Z}, \quad f(m) \in \mathbb{Z}}$$

(b) Considérons l'application $h : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.
Alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$h(m) = \frac{m^2+m}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

Or ce produit d'entiers consécutifs est pair (m ou $m+1$ est pair), donc $\frac{m(m+1)}{2} \in \mathbb{Z}$.
Donc $h(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, alors que h n'est pas à coefficients entiers. /1

La réciproque est fausse. Il existe des fonctions polynomiales à coefficients non entiers et donc les images sont entières

2. On définie les fonctions polynomiales de NEWTON comme suit :

$$N_0 : x \mapsto 1 \qquad \forall\, h \geqslant 1, N_h : x \mapsto \frac{1}{h!}\prod_{i=0}^{h-1}(x-i)$$

(a) On applique la définition, puis on développe. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: /1,5

$$\boxed{N_4(x) = \frac{24}{x}(x-1)(x-2)(x-3) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{11}{24}x^2 - \frac{1}{4}x}$$

(b) Pour $h = 0$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $N_0(k) = 1 \in \mathbb{Z}$.
Soit $h \neq 0$.

- Pour $k \in [\![0, h-1]\!]$, $N_h(k) = 0$, car k est une racine de N_h.
- Pour $k \geqslant h$, $N_h(k) = \dfrac{k(k-1)\dots(k-h+1)}{h!} = \dfrac{k(k-1)\dots(k-h+1)}{h!(k-h)!} = \dbinom{k}{h} \in \mathbb{Z}$
  (car un coefficient binomial est toujours un nombre entier).
- Pour $k < 0$, (donc $-k > 0$) : $N_h(k) = \dfrac{k(k-1)\dots(k-h+1)}{h!} = \dfrac{(-1)^h(-k)(-k+1)\dots(-k+h-1)}{h)}$

$$N_h(k) = (-1)^h \frac{(h-k-1)!}{h!(-k-1)!} = (-1)^h \binom{h-k-1}{h} \in \mathbb{Z}.$$ /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{Z}, \text{ pour tout } h \in \mathbb{N},\ N_h(k) \in \mathbb{Z}}$$

3. Soit f une fonction polynomiale à coefficients entiers de degré n.
On note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $b_k = f(k) \in \mathbb{Z}$, puis $a_k = \displaystyle\sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h}(-1)^{k-h} b_h$.
Enfin, on considère la fonction polynomiale $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{h=0}^{n} a_h N_h(x)$.

(a) Pour tout $h \in \mathbb{N}$, le degré de N_h vaut h.
Donc $\deg N_n = n$ et $\displaystyle\sum_{h=0}^{n-1} a_h N_h$ a un degré au plus égal à $n-1$. /1,5

$$\boxed{\text{Le degré de } g \text{ est } n}$$

(b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$, alors d'après une question précédente : $N_h(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < h \\ \binom{k}{h} & \text{si } k \geqslant h \end{cases}$. /1

$$\boxed{g(k) = \sum_{h=0}^{n} a_h N_h(k) = \sum_{h=0}^{k} a_h \binom{k}{h}}$$

(c) On peut approfondir le calcul :

$$g(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} (-1)^{i-h} b_h \right) = \sum_{0 \leqslant h \leqslant i \leqslant k} \binom{k}{i}\binom{i}{h}(-1)^{i-h} b_h = \sum_{h=0}^{k} \left(\sum_{i=h}^{k} \binom{k}{i}\binom{i}{h}(-1)^{i-h} b_h \right)$$

Or

$$\binom{k}{i}\binom{i}{h} = \frac{k!}{i!(k-i)!}\frac{i!}{h!(i-h)!} = \frac{k!}{h!(i-h)!(k-i)!}\frac{(k-h)!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}\binom{k-h}{i-h}$$

On a donc (en posant $j = i - h$ dans la seconde somme) :

$$\begin{aligned} g(k) &= \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} b_h \left(\sum_{i=h}^{k} \binom{k-h}{i-h} (-1)^{i-h} \right) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} b_h \left(\sum_{j=0}^{k-h} \binom{k-h}{j} (-1)^j (1)^{k-h-j} \right) \\ &= \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} b_h ((-1)+1)^{k-h} \end{aligned}$$

Or $((-1)+1)^{k-h} = 0$ si $k \neq h$ et $((-1)+1)^{k-h} = 1$, sinon. Donc /2

$$g(k) = 0 + \dots + 0 + \binom{k}{k} b_k \times 1 = b_k$$

Remarques !
Si vous avez fait cette démonstration vous aurez 4 points. Si vous avez seulement donné le résultat, vous aurez 1 point

On a alors
$$\forall\ k \in [\![0, n]\!], \qquad \varphi(k) = f(k) - g(k) = b_k - b_k = 0$$

/1

$$\boxed{\text{La fonction polynomiale } \varphi : x \mapsto f(x) - g(x) \text{ admet } n+1 \text{ racines.}}$$

(d) Si φ est non nulle, φ est de degré au plus n, elle admet donc au plus n racines.
Or d'après la question précédente, φ admet $n+1$ racines. Donc φ est la fonction nulle. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} (-1)^{k-h} f(h) \right) N_k(x)}$$

(e) On admet que l'on cherche un polynôme Φ de degré 5.
Il vérifie :
$$\begin{cases} \Phi(0) = 0^4 = 0 \\ \Phi(1) = 0^4 + 1^4 = 1 \\ \Phi(2) = 1^4 + 2^4 = 17 \\ \Phi(3) = 17 + 3^4 = 98 \\ \Phi(4) = 98 + 4^4 = 354 \\ \Phi(5) = 354 + 5^4 = 979 \end{cases}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \sum_{k=0}^{5} \left(\sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} (-1)^{k-h} \Phi(h) \right) N_k(x) \\
&= \Phi(0)N_0(x) + (\Phi(1) - \Phi(0))N_1(x) + (\Phi(2) - 2\Phi(1) + \Phi(0))N_2(x) \\
&\qquad + (\Phi(3) - 3\Phi(2) + 3\Phi(1) - \Phi(0))N_3(x) + (\Phi(4) - 4\Phi(3) + 6\Phi(2) - 4\Phi(1) + \Phi(0))N_4(x) \\
&\qquad + (\Phi(5) - 5\Phi(4) + 10\Phi(3) - 10\Phi(2) + 5\Phi(1) - \Phi(0))N_5(x) \\
&= N_1(x) + 15N_2(x) + 50N_3(x) + 60N_4(x) + 24N_5(x) \\
&= x + \tfrac{15}{2}x(x-1) + \tfrac{25}{3}x(x-1)(x-2) + \tfrac{5}{2}x(x-1)(x-2)(x-3) + \tfrac{1}{5}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\
&= \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x = \tfrac{x}{30}(6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1) \\
&= \tfrac{1}{30}x(x+1)(6x^3 + 9x^2 + x - 1) = \tfrac{1}{30}x(x+1)(2x+1)(3x^2 + 3x - 1)
\end{aligned}$$

/3

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.}$$

C. Nombres algébriques. Nombres transcendant

On dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ est un nombre algébrique si il existe une fonction polynomiale f à coefficients entiers admettant α comme racine.
Autrement écrit : α est algébrique si

$$\exists\ a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{Z} \quad \text{tels que } \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0$$

Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant.

1. Quelques valeurs

(a) Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, un nombre rationnel. Alors $qr - p = 0$. Ainsi r est racine de la fonction polynomiale $x \mapsto qx - p$. /1

$$\boxed{\text{Donc tout nombre rationnel est algébrique.}}$$

(b) De même : $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$ et $(i)^2 + 1 = 0$.
Ainsi $\sqrt{2}$ (resp. i) est racine de la fonction polynomiale $x \mapsto x^2 - 2$ (resp. $x \mapsto x^2 + 1$). /1

$$\boxed{\text{Ainsi } \sqrt{2} \text{ et } i \text{ sont algébriques.}}$$

(c) Notons $r_1 = \sqrt{2}+\sqrt{5}$, $r_2 = \sqrt{2}-\sqrt{5}$, $r_3 = -\sqrt{2}+\sqrt{5}$ et $r_4 = -\sqrt{2}-\sqrt{5}$.
Alors (en exploitant de nombreuses fois : $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$) :

$$\begin{aligned}(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4) &= [(x-\sqrt{2}-\sqrt{5})(x-\sqrt{2}+\sqrt{5})][(x+\sqrt{2}-\sqrt{5})(x+\sqrt{2}+\sqrt{5})]\\ &= [(x-\sqrt{2})^2-5][x+\sqrt{2}-5] = (x^2-3-2\sqrt{2}x)(x^2-3+2\sqrt{2}x)\\ &= (x^2-3)^2-8x^2 = x^4-14x^2+9\end{aligned}$$

Ainsi, $r_1 = \sqrt{2}+\sqrt{5}$ est une racine de la fonction polynomiale à coefficients entiers : $x \mapsto x^4-14x^2+9$ /2

$$\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{5} \text{ est bien un nombre algébrique.}}$$

2. Nombre de Liouville.
On considère ici la suite (u_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}$$

/1

(a)

$$\boxed{\begin{array}{c} u_1 = 10^{-1} = 0,1,\ u_2 = 10^{-1}+10^{-2} = 0,11,\ u_3 = u_2+10^{-6} = 0,110\,001 \\ u_4 = u_3+10^{-24} = 0,110\,001\,000\,000\,000\,000\,000\,001 \end{array}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \sum_{k=1}^{n+1} 10^{-(k)!} - \sum_{k=1}^{n} 10^{-(k)!} = 10^{-(n+1)!} > 0$.
Donc (u_n) est croissante.
Notons pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $v_r = \sum_{k=1}^{r} 10^{-r}$.
Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{10} = 10^{-1}$, donc

$$\forall\, r \in \mathbb{N}^*, \qquad v_r = v_1 \times \frac{1-10^{r-1+1}}{1-10^{-1}} \leqslant \frac{1}{10}\frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$$

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_{n!} - u_n = \sum_{k=1}^{n!} 10^{-k} - \sum_{k=1}^{n} 10^{-(k!)} = \sum_{k=1}^{n!} 10^{-k}[k \notin \{s!, s \in \mathbb{N}_n\}] \geqslant 0$$

Ainsi : /2

$$u_n \leqslant v_{n!} \leqslant \frac{1}{9}$$

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante et majorée, donc convergente.}}$$

On appelle alors $\ell = \lim(u_n)$.

3. On suppose que α est algébrique, non rationnel.
Pour unifier les notations, on note $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $\forall\, k \in [\![0,n]\!]$, $n \geqslant 2$ et $a_k \in \mathbb{Z}$
et on suppose que $f(\alpha) = 0$
(a) Faisons la division euclidienne de $f(x)$ par $x - \frac{p}{q}$.
D'après l'algorithme d'Hörner, on obtient un quotient $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ tel que :

$$\forall\, k \in \{n-1, n-2, \dots 1, 0\}, \qquad b_k = a_{k+1} + \frac{p}{q} b_{k+1}$$

(avec $b_n = 0$, pour démarrer)
Et donc, par récurrence, la suite (b_k) est une suite de nombres rationnelles.
Ainsi g et un polynôme à coefficient rationnel.
Par ailleurs, on a également $f(\alpha) = 0 = (\alpha - \frac{p}{q})g(\alpha)$.
Par intégrité de $\mathbb{R}$, $g(\alpha) = 0$ (car α n'est pas rationnel par hypothèse, donc $\alpha - \frac{p}{q} \neq 0$).
Par ailleurs, on peut noter $b_k = \frac{p_k}{q_k}$.
En multipliant g par $\prod_{k=1}^{n-1} q_k$, on trouve

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad G(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \left(\prod_{j \neq i} q_j \right) x^i$$

$G(\alpha)=0$, G est de degré $n-1$ et G est à coefficients entiers. /2

$\boxed{\text{il existe une fonction polynomiale } G \text{ à coefficients entiers de degré } n-1\text{, tel que } g(\alpha)=0.}$

(b) On suppose que α est racine d'ordre $p(\leqslant n)$ de f.
Alors α est aussi racine de f', $f^{(2)}\dots f^{(p-1)}$, mais pas de $f^{(p)}$.
Donc α est racine d'ordre 1 de $f^{(p-1)}$, obtenue par $p-1$ dérivations de f.
Or f est à coefficients entiers, il en est de même de chacune de ces dérivations.
Donc $f^{(p-1)}$ est à coefficients entiers et de degré $n-(p-1)=n-p+1$.
Précisément : pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f^{(p-1)}(x)=\sum_{h=p-1}^{n}h(h-1)\dots(h-p+2)a_hx^{h-p+1}=\sum_{h=0}^{n-p+1}(h+p-1)(h+p-2)\dots(h+1)a_hx^h$$

/1,5

$\boxed{f^{(p-1)} \text{ est à coefficients entiers, de degré } n-p+1 \text{ et } \alpha \text{ est racine d'ordre 1 de ce polynôme.}}$

On peut donc supposer pour la suite de problème que :

- f est un polynôme de degré n.
- α est racine d'ordre 1 de f
- $M_\alpha=f'(\alpha)>0$ (sinon on considère $-f$)
- f n'admet aucune racine rationnelle

4. Transcendance de α

(a) φ est dérvable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et $\forall\, x\in\mathbb{R}$:

$$\varphi'(x)=-2M+f'(x)$$

Donc pour $x\in[\alpha-\eta,\alpha+\eta]$, $\varphi'(x)<-2M+2M=0$,
alors φ est décroissante sur $[\alpha-\eta,\alpha+\eta]$.
Et par ailleurs, $\varphi(\alpha)=2M(\alpha-\alpha)+f(\alpha)=0$.
Donc f est positive sur $[\alpha-\eta,\alpha]$ et négative sur $[\alpha,\alpha+\eta]$.
Ainsi :

$$\forall\, x\in[\alpha-\eta,\alpha],\qquad \varphi(x)>0\Rightarrow 2M(\alpha-x)\geqslant -f(x)$$

Et comme, par hypothèses, $f(x)\leqslant 0$ sur $[\alpha-\eta,\alpha]$, /1,5

$$\boxed{\forall\, x\in[\alpha-\eta,\alpha],\qquad \alpha-x\geqslant\frac{-1}{2M}f(x)=\frac{1}{2M}|f(x)|}$$

(b) Soit $r=\frac{p}{q}\in[\alpha-\eta,\alpha]\cap\mathbb{Q}$, un nombre rationnel.

$$q^n\times f(r)=q^n\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{p^k}{q^k}=\sum_{k=0}^{n}a_kp^kq^{n-k}\in\mathbb{Z}$$

C'est un nombre enter, par addition et multiplication d'entiers.
Il est non nul sinon $f(r)=0$, impossible d'après nos hypothèses sur f.
Donc il existe un entier $A\in\mathbb{N}^*$, tel que $q^n\times|f(r)|=A$, ie $|f(r)|=\dfrac{A}{q^n}>\dfrac{1}{q^n}$. /2

$$\boxed{\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|>\frac{1}{q^n}}$$

(c) On a donc, si α est algébrique, pour tout rationnel $r=\frac{p}{q}\in[\alpha-\eta,\alpha]$: $\alpha-r\geqslant\dfrac{1}{2M}\dfrac{1}{q^n}(\star)$.
La suite (u_k) converge vers α en étant croissant, donc il existe un rang K tel que :

$$\forall\, k\geqslant K,\qquad 0<\alpha-u_k<\eta$$

Et par ailleurs, pour tout k, u_k est un nombre rationnel : $u_k=\dfrac{1}{10^{k!}}\sum\limits_{i=1}^{k}10^{k!-i!}$,
ainsi, pour tout $k\geqslant K$,

$$\alpha-u_k\geqslant\frac{1}{2M}\frac{1}{10^{k!\times n}}$$

Or pour $k > n$, comme (u_k) est croissante :

$$0 < 10^{k!\times n}(\alpha - u_k) < 10^{k!\times n}(u_{k+1} - u_k) = \frac{10^{k!\times n}}{10^{(k+1)!}} = \frac{1}{10^{k!(k+1-n)}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc, il existe K' tel que pour $k \geqslant K'$, $0 < 10^{k!\times n}(\alpha - u_k) < \dfrac{1}{2M}$.
En prenant $\overline{K} = \max(K, K', n)$, on trouve que

$$\forall\ k \geqslant \overline{K'}, \qquad 0 < \alpha - u_k < \frac{1}{2M}\frac{1}{10^{k!\times n}}$$

L'existence de ce nombre rationnel conduit à une contradiction par rapport à $(\star)$ /4

$\boxed{\alpha \text{ n'est pas un nombre algébrique. } \alpha \text{ est un nombre transcendant.}}$