Devoir à la maison n°1

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$. La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Problème 1

1. Factorisation d'un polynôme réel de degré 3
   (a) Soit f un polynôme de degré 3.
   Si le coefficient dominant de f est positif, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
   Si le coefficient dominant de f est négatif, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
   Dans tous les cas, il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0$,
   or $x \mapsto f(x)$ est continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre x_1 et x_2,
   $$\boxed{\exists\ a \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a) = 0}$$
   C'est-à-dire : f admet au moins une racine réelle notée a.
   (b) On peut donc factoriser f par $x \mapsto (x-a)$.
   Et il existe g, polynôme de degré 2 tel que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)\times g(x)$.
   g se factorise (au moins sur $\mathbb{C}$). Selon le signe du discriminant de g :
   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{- ou bien } b, c \in \mathbb{R} \text{ si } \Delta(g) \geqslant 0\\ \text{- ou bien } b, c \notin \mathbb{R} \text{ et alors } c = \overline{b} \text{ (conjugué de } b\text{) si } \Delta(g) < 0\end{array}}$$

2. (a) D'après la question précédente, f se factorise sous la forme :
   $$\exists\ \alpha, a, b, c \in \mathbb{C} \mid \forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha(x-a)(x-b)(x-c)$$
   On a alors en développant :
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x^3 - \alpha(a+b+c)x^2 + \alpha(ab+bc+ac)x - \alpha abc$.
   Ce résultat étant vrai pour tout x, nous pouvons faire une identification (remarque initiale).
   $$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha &=& 1\\ \alpha(a+b+c) &=& 0\\ \alpha(ab+bc+ac) &=& p\\ \alpha abc &=& -q\end{array}\right.$$
   Par ailleurs, la dérivation de f, donne :
   pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \alpha[(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)]$.
   et donc, comme $\alpha = 1$, $f'(a) = (a-b)(a-c)$, $f'(b) = (b-a)(b-c)$ et $f'(c) = (c-a)(c-b)$.
   Donc
   $$\boxed{\Delta(f) = (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = -(a-b)(a-c)(b-a)(b-c)(c-a)(c-b) = -f'(a)f'(b)f'(c)}$$
   Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + p$, donc $f'(a) = 3a^2 + p$,
   de même : $f'(b) = 2b^2 + p$ et $f'(c) = 2c^2 + p$.
   Donc, en développant :
   $$\Delta(f) = -(3a^2+p)(3b^2+p)(3c^2+p) = -\left(p^3 + 3(a^2+b^2+c^2)p^2 + 9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)p + 27a^2b^2c^2\right)$$
   Or $abc = -q$, donc $a^2b^2c{=}(abc)^2 = (-q)^2 = q^2$
   $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$,
   donc $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 0^2 - 2p = -2p$
   $(ab+bc+ac)^2 = (a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) + 2(ab^2c + a^2bc + abc^2)$
   $= (a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) + 2abc(a+b+c)$;
   or $a+b+c = 0$, donc $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 = (ab+bc+ac)^2 = p^2$.
   Par conséquent :
   $$\boxed{\Delta(f) = -\left(p^3 + 3(-2p)p^2 + 9p^2p + 27q^2\right) = -4p^3 - 27q^2}$$

(b) Si f est un polynôme à coefficients réels de degré 3, il admet nécessairement une racine réelle.
On a donc deux cas $a,b,c\in\mathbb{R}$, ou $a\in\mathbb{R}$ et $b,c\notin\mathbb{R}$ avec $b=\overline{c}$.
— Dans le premier cas, nécessairement $\Delta(f)=[(a-b)(b-c)(a-c)]^2\geqslant 0$.
— Dans le second cas, $b-c=b-\overline{b}=2i\mathrm{Im}(b)$ et donc $(b-c)=-4\mathrm{Im}(b)^2<0$ (car $\mathrm{Im}(b)\neq 0$).
Alors que $(a-b)(a-c)=(a-b)(a-\overline{b})=(a-b)\overline{(a-b)}=|a-b|^2>0$
(non nul car $a\in\mathbb{R}$ et $b\notin\mathbb{R}$, donc $a\neq b$).
Ainsi, ici $\Delta(f)<0$

$\boxed{\text{Lorsque } p \text{ et } q \text{ sont réels, les racines de } f \text{ soient réelles si et seulement si } \Delta=-4p^3-27q^2\geqslant 0.}$

On notera que $\Delta=0$ si et seulement f admet une racine (au moins) double.

(c) Soit $g: x\mapsto x^3+ux^2+vx+w$ avec $u,v,w\in\mathbb{R}$ et de racines a,b et c distinctes ou non (non nécessairement réelles).
On considère $\overline{g}: x\mapsto g\left(x-\frac{u}{3}\right)$.
Après calcul, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\overline{g}(x)=x^3+\left(\frac{u^2}{3}-\frac{2u^2}{3}+v\right)x+\left(-\frac{u^3}{27}+\frac{u^3}{9}-v\frac{u}{3}+w\right)=x^3+\left(v-\frac{u^2}{3}\right)x+\left(\frac{2u^3}{27}-\frac{uv}{3}+w\right)$$

Or par translation, les racines de g sont réelles si et seulement celles de $\overline{g}$ le sont.
Mais ces dernières le sont ssi $\Delta(\overline{g})=-4\left(v-\frac{u^2}{3}\right)^3-27\left(\frac{2u^3}{27}-\frac{uv}{3}+w\right)^2\geqslant 0$.
Or $\Delta(\overline{g})=\cdots=-4v^3+u^2v^2-4u^3w+18uvw-27w^2$.

$\boxed{g \text{ n'a que des racines si et seulement si } -4v^3+u^2v^2-4u^3w+18uvw-27w^2\geqslant 0}$

Problème 2

1. Il existe autant de suite c_i que de permutation de $\{1,2,\dots n\}$, les indices de (b_i).

$\boxed{\text{Donc il y a } n! \text{ suites } (c_i) \text{ possible.}}$

Pour s'en convaincre, si on ne connait pas les factorielles, il suffit de penser au la méthode de construction des suites (c_i).
1. b_1 peut être donné au n c_i : n possibilités
2. puis b_2 peut être donné au $n-1$ c_i qui restent : $n-1$ possibilités
3. puis b_3 peut être donné au $n-2$ c_i qui restent : $n-2$ possibilités
k. …
n. puis b_n peut être donné au dernier c_i qui reste : 1 possibilités
Le décompte total est obtenu par multiplication (puis)

2. On suppose que i et j sont tels que $b_n=c_j$ et $b_i=c_n$.
Quel est le signe de $a_jc_j+a_nc_n-a_nb_n-a_jb_i$? On a donc

$$a_jc_j+a_nc_n-a_nb_n-a_jb_i=a_jb_n+a_nb_i-a_nb_n-a_jb_i=(a_j-a_n)(b_n-b_i)$$

Or par croissance : $a_j<a_n$ et $b_n>b_i$, donc $a_j-b_n<0$, $(b_n-b_i)>0$.

$\boxed{\text{Ainsi } a_jc_j+a_nc_n-a_nb_n-a_jb_i<0}$

3. On considère la permutation (c_i') obtenue à partir de (b_i) par : $\forall\, h\notin\{j,n\}$, $c_h'=c_h$, $c_j'=b_i$ et $c_n'=b_n$.
(Il s'agit bien d'une permutation, car comme $h\neq n$, $c_h\neq c_n=b_i$, ce qui justifie que l'on puiss eprendre $c_j'=b_i$).
Alors

$$\sum_{k=1}^{n}a_kc_k-\sum_{k=1}^{n}a_kc_k'=a_jc_j+a_nc_n-a_jc_j'-a_nc_n'=a_jc_j+a_nc_n-a_nb_n-a_jb_i<0$$

$$\boxed{\text{Donc } \sum_{k=1}^{n}a_kc_k<\sum_{k=1}^{n}a_kc_k'}$$

4. Posons, pour tout entier $n\geqslant 2$,

$$\mathcal{P}_n :\ll \text{ pour toute permutation } (c_i) \text{ de } (b_i), \text{ alors } S_c\leqslant S_b \gg$$

— $a_1 < a_2$ et $b_1 < b_2$, alors $(a_1b_2 + a_2b_1) - (a_1b_1 + a_2b_2) = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{<0}\underbrace{(b_2 - b_1)}_{>0} < 0$.

Donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

— Soit $n \geqslant 3$. On suppose que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie.

Soit (c_i), une permutation de (b_i) et (c'_i) définie comme en question 3.

En réalité, comme $c'_n = b_n$, $(c'_1, \dots c'_{n-1})$ est une permutation de $(b_1, \dots b_{n-1})$.

Donc on peut applique $\mathcal{P}_{n-1}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k c'_k \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k$.

Si on ajoute de part et d'autre $a_nb_n = a_nc'_n$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k c'_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

Puis, d'après la question précédente : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k c'_k$.

Et donc par transitivité : $S_c \leqslant S_b$.

On a montré, par récurrence, une seule inégalité. Pour la seconde, nous allons exploiter la première.

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\overline{b_k} = b_n - b_k$, donc la suite $\overline{b_k}$ est positive est strictement décroissante.

Soit (c_i), une permutation de (b_i), alors $(\overline{c_i} = b_n - b_i)$ est une permutation de $(\overline{b_i})$.

Donc d'après le résultat démontré par récurrence, (comme $(b_{n-k})_k$ est croissante) :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{c_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b'_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a_k(b_n - b_{n-k}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_n - \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_n - \sum_{k=1}^{n} a_k c_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(b_n - \overline{c_k}) = \sum_{k=1}^{n} a_k c_k$$

Et ainsi $S_{-b} \leqslant S_c$.

$$\boxed{\text{Pout toute permutation } (c_i) \text{ de } (b_i)\text{, on a } \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}}_{=S_{-b}} < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i c_i}_{=S_c} < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}_{=S_b}}$$

On appelle cette inégalité, l'inégalité de réarrangement

5. Application 1.

On considère $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}_+$.

En notant $m = \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$, puis $A_i = \frac{x_1x_2\cdots x_i}{m^i}$,

$(a_i) = (A_k)$ ordonnée par ordre croissant et enfin (b_i) tel que $b_i = \frac{1}{a_i}$.

Par conséquent ces suites sont à valeurs positives, (a_i) est croissant et (b_i) décroissante.

On a donc pour toute permutation (c_i) de (b_i),

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$$

Or $a_ib_i = 1$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = n$.

Puis avec c_i permutation de (b_i) tel que :

— si $b_i = \frac{1}{a_i} = \frac{1}{A_k} = \frac{m^k}{x_1x_2\cdots x_k}$ $(k \geqslant 2)$, alors $c_i = \frac{m^{k-1}}{x_1x_2\cdots x_{k-1}} = \frac{1}{A_{k-1}}$.

Et donc dans ce cas $a_ic_i = \dfrac{A_k}{A_{k-1}} = \dfrac{x_k}{m}$

— si $b_i = \frac{1}{a_i} = \frac{1}{A_1} = \frac{m^1}{x_1}$, alors $c_i = \frac{m^n}{x_1x_2\cdots x_k\cdots x_n} = 1$, le dernier b_j non considéré.

Alors, dans ce cas, $a_ic_i = A_1 \times 1 = \dfrac{x_1}{m}$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i c_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{m} \geqslant n$.

$$\boxed{\forall\ (x_1, x_2, \dots x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \qquad \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$

6. Application 2.
On considère (a_i) et (b_i) deux suites finies de nombres réels positifs croissantes.

$$\sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^n b'_j = \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = a_1\left(\sum_{j=1}^n b_j\right) + a_2\left(\sum_{j=1}^n b_j\right) + \cdots + a_n\left(\sum_{j=1}^n b_j\right)$$

Notons, pour tout $i,k \in \mathbb{N}_n$, $c_{i,k} = \begin{cases} bi+k & \text{si} \quad i+k \leqslant n \\ bi+k-n & \text{si} \quad i+k > n \end{cases}$

i.e. pour tout $i,j \in \mathbb{N}_n$, $b_j = \begin{cases} c_{i,j-i} & \text{si} \quad j > i \\ c_{i,j-i+n} & \text{si} \quad j \leqslant i \end{cases}$ $(j = i+k \Leftrightarrow k = j-i)$ Donc,

$$a_i \sum_{j=1}^n b_j = a_i\left(\sum_{j=1}^i b_j + \sum_{j=i+1}^n b_j\right) = a_i\left(\sum_{j=1}^i c_{i,n-i+j} + \sum_{j=i+1}^n c_{i,j-i}\right)$$

$$= a_i\left(c_{i,n-i+1} + + \cdots + c_{i,n} + c_{i,1} + \ldots c_{i,n-i}\right) = \sum_{k=1}^n a_i c_{i,k}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i c_{i,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_i c_{i,k}$$

Or, à k fixé, $(c_{i,k})$ est aussi une permutation de (b_j), donc d'après l'inégalité de réarrangement :

$$\sum_{i=1}^n a_i c_{i,k} \leqslant \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

En sommant pour k de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^n b_j \leqslant \sum_{i=1}^n a_i b_i \sum_{k=1}^n 1 = n \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

En divisant par n^2 :

$$\boxed{\forall\ (a_i),(b_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \text{ croissantes } : \frac{a_1b_1 + \cdots a_nb_n}{n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \times \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}}$$

7. Application 3. Les calculs donnent :

$$(a_1b_1 + \cdots a_nb_n)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j \qquad (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) \times (b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2$$

Il faut différencier ces n^2 nombres ajoutés :

$a_i b_j = c_k$ avec la transformation bijective : $k-1 = (i-1) + n(j-1)$

(division euclidienne de $k-1$ par n : $i-1$ est le reste, $j-1$ est le quotient).

On a : $k = 1 \Leftrightarrow (i,j) = (1,1)$ / $k = 2 \Leftrightarrow (i,j) = (2,1)$ / … / $k = n \Leftrightarrow (i,j) = (n,1)$

$k = n+1 \Leftrightarrow (i,j) = (1,2)$ / $k = n+2 \Leftrightarrow (i,j) = (2,2)$ / … / $k = 2n \Leftrightarrow (i,j) = (n,2)$

$\vdots$

$k = n^2-n+1 \Leftrightarrow (i,j) = (1,n)$ / $k = n+2 \Leftrightarrow (i,j) = (2,n)$ / … / $k = n^2 \Leftrightarrow (i,j) = (n,n)$

Notons donc pour tout $k \in [\![1,n^2]\!]$, $d_k = c_k$.

Les deux suites (identiques) $(c_k) = (d_k)$ se rangent exactement dans le même ordre.

Donc pour toute permutation (d'_k) de (d_k) :

$$\sum_{k=1}^{n^2} c_k d'_k \leqslant \sum_{k=1}^{n^2} c_k d_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2$$

Or avec la permutation : $d'_k = d'_{(i-1)+n(j-1)+1} = a_j b_i = d_{(j-1)+n(i-1)+1}$,

on a $c_k d'_k = a_i b_j a_j b_i$, avec (i,j) défini par la relation : $k-1 = (i-1) + n(j-1)$.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j = \sum_{k=1}^n c_k d'_k \leqslant \sum_{k=1}^{n^2} c_k d_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2$$

$$\boxed{(a_1b_1 + \cdots a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) \times (b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)}$$

Ali et Benoit jouent au jeu suivant : on écrit $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + 1$ au tableau. Ali choisit une étoile et la remplace par un réel, puis c'est à Benoit, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des étoiles. Ali gagne si le polynôme obtenu n'a pas de racine réelle. Sinon, c'est Benoit qui gagne.
Montrer que ce dernier a une stratégie gagnante.

On note $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ ce polynôme.
Remarquons déjà que $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, et p est continue
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il suffit de trouver x_0 tel que $p(x_0) \geqslant 0$, pour pouvoir affirmer qu'il existe $\overline{x}$ tel que $p(\overline{x}) = 0$.
Et dans ce cas, Benoit gagne le jeu.
Voici la stratégie gagnante pour Benoit :

— Si Ali ne choisit pas b comme premier réel, alors Benoit le choisit et lui donne la valeur $B = -2$. On a alors (pour tout choix de a et c par Ali) :

$$p(-1) + p(1) = 4 + 2B = 0$$

Donc $p(1)$ et $p(-1)$ sont de signe opposé (ou nuls tous les deux). Au moins l'un des deux est négatif ou nul.
Ainsi Benoit gagne.
On notera que pour toute valeur $B \leqslant -2$, le même raisonnement s'applique.

— Si Ali choisit b comme premier réel et lui donne la valeur $B (> -2)$.
On note $A = \frac{1}{2}\left(p(-10) + p(10)\right) = 10001 + 100B$ et $C = \frac{1}{2}\left(p(-5) + p(5)\right) = 626 + 25B$.

— Si $A \leqslant 0$, alors comme précédemment, $p(10)$ ou $p(-10)$ est négatif ou nul, et donc Benoit gagne.

— On peut donc supposer que $A > 0$ (et de même $C > 0$), ce qui donne $100B > -10001$ i.e. $B > 100,01$.
Benoit choisit alors $a = -A$. On a $p : x \mapsto x^4 - Ax^3 + Bx^2 + cx + 1$
Et donc, quel que soit le choit d'Ali pour c, en $x = 10$:

$$p(10) = 10^4 - A \times 10^3 + B10^2 + c10 + 1 = 10001 + 100B - 10^3A + 10c = 10c - 999A$$

$$p(-5) = 5^4 + 5^3A + 5^2B - 5c + 1 = 656 + 25B - 5c + 125A = C - 5c + 125A$$

— Si $p(10) \leqslant 0$, Benoit gagne.

— On suppose que $p(10) > 0$ i.e. $10c - 999A > 0$, et donc $c > 99,9A > 99A$ $(A > 0)$.
On a alors $p(-5) = C - 5c + 125A < C - 495A + 125A = C - 370A$
Or $A - C = 10\,000 - 625 + 75B = 9375 + 75B > 0$ car $B > -2$, donc $A > C$.
et donc dans ce cas $p(-5) < C - 370C < -369C < -2C$ $(C > 0)$.
Donc $p(5) = 2C - p(-5) < 0$. Et ainsi Benoit gagne