Devoir surveillé n°1

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole ($*$) voire ($**$).
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème. Autour des polynômes à coefficients entiers

Dans l'ensemble de ce problème nous nous intéressons aux fonctions polynomiales à coefficients entiers. Nous verrons dans trois parties indépendantes trois résultats importants.

A. Localisation des racines

On considère pour cette partie $f : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, une fonction polynomiale de degré n et à coefficients entiers. C'est-à-dire :

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \qquad a_k \in \mathbb{Z}$$

1. Recherche d'une racine évidente entière.
   (a) Montrer que si $x_0 \in \mathbb{Z}$ est une racine de f, alors x_0 divise a_0.
   (On rappelle que cela signifie qu'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $a_0 = x_0 \times b$)
   (b) Application : Factoriser la fonction polynomiale
   $$x \mapsto x^3 + 5x^2 - 29x - 105$$
2. Encadrement des racines par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (a) Soient $(x_1, \dots x_n), (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$.
      i. Soient $i < j \in [\![1, n]\!]$, montrer que $2x_i x_j y_i y_j \leqslant x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2$
      ii. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
      $$\forall\, (x_1, \dots x_n), (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2 \times \sum_{i=1}^n y_i^2$$
   (b) On suppose que f se factorise sur $\mathbb{C}$ de la façon suivante :
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - y_1) \dots (x - y_{n-1})(x - y_n)$$
      i. Exprimer $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, en fonction de $\frac{a_{n-1}}{a_n}$.
      (*On développera la factorisation de f, on pourra effectuer une identification*)
      ii. De même donner la valeur de $y_n(y_1 + \cdots + y_{n-1}) + \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} y_i y_j$
      iii. En déduire que $a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2} - a_n^2 y_n^2 = a_n^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$
      iv. En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la question précédente montrer que
      $$(a_{n-1} + a_n y_n)^2 \leqslant (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2} - a_n^2 y_n^2)$$
      v. En déduire que (*)
      $$\frac{y_n}{a_n} \in \left[-\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_{n-2}}; -\frac{a_{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_{n-2}}\right]$$
      (*On pourra montrer que y_n est située entre deux racines d'un polynôme de degré 2*)

B. Images entières

1. Observations
   (a) Montrer que si f est une application polynomiale à coefficients entiers, alors $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire :
   $$\forall\, m \in \mathbb{Z}, \qquad f(m) \in \mathbb{Z}$$
   (b) La réciproque est-elle vraie ?
   On pourra exploiter $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.
2. On définie les fonctions polynomiales de Newton comme suit :
   $$N_0 : x \mapsto 1 \qquad \forall\, h \geqslant 1, N_h : x \mapsto \frac{1}{h!}\prod_{i=0}^{h-1}(x-i)$$
   (a) Exprimer N_4 sous forme développée.
   (b) Vérifier que pour tout $h \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $N_h(k) \in \mathbb{Z}$
3. Soit f une fonction polynomiale à coefficients entiers de degré n.
   On note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $b_k = f(k) \in \mathbb{Z}$, puis $a_k = \displaystyle\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}(-1)^{k-h}b_h$.
   Enfin, on considère la fonction polynomiale $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{h=0}^{n} a_h N_h(x)$.
   (a) Quel est le degré de g ?
   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $g(k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_i$
   (c) Montrer alors que la fonction polynomiale $\varphi : x \mapsto f(x) - g(x)$ admet $n+1$ racines.
   (d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}(-1)^{k-h}f(h)\right)N_k(x)$
   (e) Application : Donner une formule explicite de $n \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4$.
   (*On admettra qu'il s'agit d'une fonction polynomiale de degré* 5.)

C. Nombres algébriques. Nombres transcendant

On dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ est un nombre algébrique si il existe une fonction polynomiale f à coefficients entiers admettant α comme racine.
Autrement écrit : α est algébrique si

$$\exists\, a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{Z} \quad \text{tels que} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0$$

Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant.

1. Quelques valeurs
   (a) Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.
   (b) Montrer que $\sqrt{2}$ et i sont algébriques.
   (c) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ est algébrique.
2. Nombre de Liouville.
   On considère ici la suite (u_n) définie par :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{-(k!)}$$
   (a) Donner l'écriture décimale de u_1, u_2, u_3 et u_4.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée.

On rappelle que : *toute suite de réels croissante et majorée converge.* On appelle alors $\ell = \lim(u_n)$.

3. On suppose que α est algébrique, non rationnel.

   Pour unifier les notations, on notera $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $\forall\ k \in [\![0, n]\!]$, $n \geqslant 2$ et $a_k \in \mathbb{Z}$

   et on suppose que $f(\alpha) = 0$ On étudie ici les propriétés de f

   (a) On suppose que f admet une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ (écriture irréductible : $p \wedge q = 1$). Montrer qu'il existe une fonction polynomiale à coefficients entiers de degré $n-1$, tel que $g(\alpha) = 0$.

   (b) On suppose que α est racine d'ordre $p (\leqslant n)$ de f. Donner un polynôme de degré $n - p + 1$ à coefficients entiers tel que α est racine d'ordre 1 de ce polynôme.

On peut donc supposer pour la suite de problème que :

- f est un polynôme de degré n.
- α est racine d'ordre 1 de f
- $M_\alpha = f'(\alpha) > 0$ (sinon on considère $-f$)
- f n'admet aucune racine rationnelle.

4. Transcendance de α.

   On admet, par continuité de f' et de f, qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

   - pour $x \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, $f'(x) < 2M$.
   - pour $x \in [\alpha - \eta, \alpha[$, $f(x) < 0$ et pour $x \in]\alpha, \alpha + \eta]$, $f(x) > 0$

   (a) Soit $\varphi : x \mapsto 2M(\alpha - x) + f(x)$, dérivable sur $\mathbb{R}$. En étudiant les variations de φ sur $[\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, montrer que

   $$\forall\ x \in [\alpha - \eta, \alpha], \qquad \alpha - x \geqslant \frac{1}{2M}|f(x)|$$

   (b) Soit $r = \dfrac{p}{q} \in [\alpha - \eta, \alpha] \cap \mathbb{Q}$, un nombre rationnel. Monter que $f\left(\dfrac{p}{q}\right) > \dfrac{1}{q^n}$.

   (c) (*) En déduire que α est un nombre transcendant.