Devoir à la maison n°1

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$. La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Problème 1

Dans tout ce problème, on admet le théorème d'identification :
Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^3 + bx^2 + cx + d = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$ alors $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ et $d = d'$.

1. Factorisation d'un polynôme réel de degré 3
   (a) Montrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré 3 admet au moins une racine réelle notée a ici.
   (b) Montrer alors que ce polynôme admet deux autres racines (complexes), notée b et c (non nécessairement différentes) avec l'une des deux situations suivantes :
   — ou bien $b, c \in \mathbb{R}$
   — ou bien $b, c \notin \mathbb{R}$ et alors $c = \overline{b}$ (conjugué de b)
   Qu'est-ce qui permet de faire simplement la différence entre les deux cas ?
2. Discriminant d'un polynôme de degré 3.
   A toute fonction polynomiale φ (lu « phi ») de degré 3 et de racines a, b et c, on associe le nombre $\Delta(\varphi) = [(a-b)(b-c)(c-a)]^2$, appelé discriminant de φ.
   Pour la suite du problème, on considère la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^3 + px + q$.
   (a) Montrer que $\Delta(f) = -f'(a)f'(b)f'(c)$ et en déduire la valeur de $\Delta(f)$ en fonction de p et q.
   (b) Lorsque p et q sont réels, donner une condition nécessaire et suffisante pour que les racines de f soient réelles.
   (c) Soit $g : x \mapsto x^3 + ux^2 + vx + w$ avec $u, v, w \in \mathbb{R}$ et de racines a, b et c distinctes ou non (non nécessairement réelles).
   On considère $\overline{g} : x \mapsto g\left(x - \frac{u}{3}\right)$.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les racines de g soient réelles.

Problème 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère deux suites finies de réels **positifs** : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et b_1, b_2, b_n.
On suppose que ces suites sont ordonnées : $a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_{n-1} < a_n$ et $b_1 < b_2 < b_3 \cdots < b_{n-1} < b_n$.
On considère une permutation de (b_i), que l'on note (c_i).
Autrement écrit ; à tout i de $[\![1, n]\!]$, correspond un unique j de $[\![1, n]\!]$ tel que $b_i = c_j$
Avec les (c_i), nous avons *perdu* l'ordre de (b_i).

Par la suite, on considère : $S_c = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i c_i = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n$

1. Combien existe-t-il de telles suites (c_i) possible ?
2. On suppose que i et j sont tels que $b_n = c_j$ et $b_i = c_n$.
   Quel est le signe de $a_j c_j + a_n c_n - a_n b_n - a_j b_i$?
3. On considère la permutation (c'_i) obtenue à partir de (b_i) par : $\forall\ h \notin \{j, n\}$, $c'_h = c_h$, $c'_j = b_i$ et $c'_n = b_n$.
   (Il s'agit bien d'une permutation, car comme $h \neq n$, $c_h \neq c_n = b_i$. On peut prendre $c'_j = b_i$).
   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k c_k < \sum_{k=1}^{n} a_k c'_k$

4. (*) Démontrer alors, par récurrence sur $n \geqslant 2$, le résultat suivant :
pout toute permutation (c_i) de (b_i), on a

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}}_{=S_{-b}} < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i c_i}_{=S_c} < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}_{=S_b}$$

5. Application 1.
On considère $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}_+$.
En notant $m = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, puis $A_i = \frac{x_1 x_2 \cdots x_i}{m^i}$,
$(a_i) = (A_k)$ ordonnée par ordre croissant et enfin (b_i) tel que $b_i = \frac{1}{a_i}$,
montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\text{pour tout } x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}_+^* \qquad \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

6. Application 2.
Démontrer l'inégalité de Tchebychev :

$$\forall\ (a_i), (b_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \text{ croissantes } : \frac{a_1 b_1 + \cdots a_n b_n}{n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \times \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$

7. Application 3.
Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(a_1 b_1 + \cdots a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$