Devoir à la maison n°2
CORRECTION

Problème

On considère dans tout ce problème la fonction polynomiale :

$$f : x \mapsto x^3 - x - 1$$

1. Etude des racines de f.

(a) f, polynomiale est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 1 = 3(x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x + \frac{1}{\sqrt{3}})$ et donc :
— f est croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ à valeurs dans $]\lim_{-\infty} f, f(\frac{-1}{\sqrt{3}})] =]-\infty, \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1[\subset \mathbb{R}_-^*$,
— f es décroissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$, nécessairement
— f est croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[$ à valeurs dans $[f(\frac{-1}{\sqrt{3}}), \lim_{+\infty} f[=]-\frac{2}{3\sqrt{3}} - 1, +\infty[$, contenant 0

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur chacun de ces intervalles, en appliquant le théorème de la bijection, on ne trouve qu'un unique antécédent à 0 par f sur $\mathbb{R}$.
Donc f admet une unique racine réelle notée λ.
Plus précisément cette racine se trouve dans l'intervalle $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[$.
Mieux : comme $0 \in]-1, 5[=]f(1), f(2)[$, alors $\lambda \in]1, 2[$ (f strictement croissante ici).

$$\boxed{f \text{ possède une unique racine réelle, notée } \lambda \text{ et que } \lambda \in]1, 2[.}$$

(b) Les racines de f sont donc λ, σ et $\overline{\sigma}$.
On a alors, par identification, le produit des racines qui vaut $-(-1)$, donc

$$\boxed{\lambda\sigma\overline{\sigma} = \lambda|\sigma|^2 = 1}$$

On a alors $\lambda \in [1, 2]$, donc par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$:

$$|\sigma|^2 = \frac{1}{\lambda} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right] \Longrightarrow |\sigma| \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$$

(On peut composer par la racine carrée de l'inégalité : tous les nombres sont positifs). Donc

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} < |\sigma| < 1 (< \lambda < 2)}$$

2. Etude de suites.
On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 3,\ u_1 = 0,\ u_2 = 2, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$$

Puis, on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = \cos(\pi u_n)$

(a) Le calcul donne :

$$\boxed{u_0 = 3\ ;\ u_1 = 0\ ;\ u_2 = 2\ ;\ u_3 = 3\ ;\ u_4 = 2\ ;\ u_5 = 5\ ;\ u_6 = 5\ ;\ u_7 = 7\ ;\ u_8 = 10\ ;\ u_9 = 12\ ;\ u_{10} = 17}$$

Puis, la parité de u_n (entier), donne la valeur de v_n :

$$\boxed{v_0 = -1\ ;\ v_1 = 1\ ;\ v_2 = 1\ ;\ v_3 = -1\ ;\ v_4 = 1\ ;\ v_5 = -1\ ;\ v_6 = -1\ ;\ v_7 = -1\ ;\ v_8 = 1\ ;\ v_9 = 1\ ;\ v_{10} = -1}$$

(b) Il s'agit de faire une récurrence à trois termes. Posons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $u_n \in \mathbb{N}$ ».
— $u_0 = 3 \in \mathbb{N}$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
— $u_1 = 0 \in \mathbb{N}$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
— $u_2 = 2 \in \mathbb{N}$, donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_{n+1}$ et $\mathcal{P}_{n+2}$ sont vraies.
Alors $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$ est un nombre entier comme addition de deux nombres entiers.
Donc $\mathcal{P}_{n+3}$ est vraie.

La récurrence est démontrée

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est à valeurs entières.}}$$

(c) On va montrer que

- (v_n) est périodique, de période $P \leqslant 7$ (par récurrence)
- Puis que la période P est supérieure à 7 (en regardant les premiers termes).
- On pourra alors noter que les valeurs prises par (v_n) sont : $(-1, 1, 1, -1, 1, -1, -1)$ (répétées).

Notons donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$: « $v_{n+7} = v_n$ ».

— $v_7 = -1 = v_0$, donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

— $v_8 = -1 = v_1$, donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

— $v_9 = -1 = v_2$, donc $\mathcal{H}_2$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{H}_{n+1}$ et $\mathcal{H}_{n+3}$ sont vraies.
Alors
$$v_{(n+3)+7} = v_{n+10} = v_{n+8} + v_{n+7} \underbrace{=}_{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{n+1}} v_{n+1} + v_n = v_{n+3}$$
Donc $\mathcal{H}_{n+3}$ est vérifiée.

La récurrence est démontrée et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+7} = v_n$.
Ainsi, (v_n) est périodique de période$P$ égale au plus à 7.
Par ailleurs v_1, v_2, v_4 sont différents de v_0, donc $P \notin \{1, 2, 4\}$.
$v_5 \neq v_2$, donc $P \neq 3$, $v_6, v_7 \neq v_1$ donc $P \notin \{5, 6\}$.
Par conséquent $P \geqslant 7$. Par double inégalité

$$\boxed{(v_n) \text{ est périodique de période } P = 7}$$

Remarques !

On montre que si P_1 et P_2 sont deux périodes alors $aP_1 + bP_2$ (avec $a, b \in \mathbb{Z}$) est également une période.
En appliquant l'algorithme d'Euclide, on montre alors que $P_1 \wedge P_2$ (PGCD) est nécessairement également une période.
Donc comme 7 était une période, on aurait pu affirmer directement que $P|7$.
Or 7 est premier, donc $P = 1$ ou $P = 7$. Or très visiblement $P \neq 1$, donc $P = 7$.

(d) Soit $m \geqslant 7$.
On note q_m et r_m, respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de m par 7.
On a alors

$$\begin{aligned} mw_m &= \sum_{n=0}^{7q_m+r_m} v_n = (v_0 + \cdots + v_6) + (v_7 + \cdots + v_{13}) + \cdots + (v_{7(q-1)} + \cdots + v_{7(q_m-1)+6}) + v_{7q_m} + \cdots + v_{7q_m+r_m} \\ &= \sum_{k=0}^{q_m-1} (\sum_{i=0}^{6} v_{7k+i}) + \sum_{i=0}^{r_m} v_{7q_m+i} \end{aligned}$$

Or, par 7 périodicité de (v_n), pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{6} v_{7k+i} = v_0 + v_1 + \cdots + v_6 = -1$.
et pour tout $(q, r) \in \mathbb{N} \times [\![0, 6]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} v_{7q+i} \in \{-1, 0, 1\}$.

Donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$,
$$mw_m = \sum_{k=0}^{q_m-1} (-1) + \sum_{i=0}^{r_m} v_{7q_m+i} = -q_m + \epsilon_m \qquad \text{avec } \epsilon_m \in \{-1, 0, 1\}$$

Or $m = 7q_m + r_m$, donc $\dfrac{q_m}{m} = \dfrac{7q_m}{7m} = \dfrac{m - r_m}{7m} = \dfrac{1}{7} - \dfrac{r_m}{7m}$.
Comme (r_m) est bornée, alors $\left(\dfrac{r_m}{7m}\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\left(\dfrac{q_m}{m}\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{7}$.
Et par addition de limite ($w_m = \frac{-q_m}{m} + \frac{\epsilon_m}{m}$) :

$$\boxed{\text{La suite } (w_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ définie par : } \forall\, m \in \mathbb{N},\ w_m = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m} v_n \text{ converge vers } \frac{-1}{7}.}$$

(e) Le système est un système de Cramer

(3 inconnues et de rang égal à 3, son déterminant est non nul : c'est un déterminant de Vandermonde - nous verrons cela plus tard)

Il admet donc une unique solution...

Or $1+1+1=3$, $\lambda+\sigma+\overline{\sigma}=0$ (après identification du développement de f factorisée).

De même $\lambda\sigma+\lambda\overline{\sigma}+\sigma\overline{\sigma}=-1$.

Donc $0=(\lambda+\sigma+\overline{\sigma})^2=\lambda^2+\sigma^2+\overline{\sigma}^2+2(\lambda\sigma+\lambda\overline{\sigma}+\sigma\overline{\sigma})=\lambda^2+\sigma^2+\overline{\sigma}^2-2$.

Donc $\lambda^2+\sigma^2+\overline{\sigma}^2=2$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc } (x,y,z)=(1,1,1) \text{ est bien la solution du système (de Cramer)}\\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = 3\\ \lambda x & + & \sigma y & + & \overline{\sigma} z & = 0\\ \lambda^2 x & + & \sigma^2 y & + & \overline{\sigma}^2 z & = 2\end{array}\right.\end{array}}$$

(f) On peut faire une récurrence (à trois termes), ou un montrer que $u_n-(\lambda^n+\sigma^n+\overline{\sigma}^n)$ est la suite constante nulle.

Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n$: « $u_n=\lambda^n+\sigma^n+\overline{\sigma}^n$ ».

— $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont vraies. Il s'agit exactement des trois équations du système.

— Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_{n+1}$ et $\mathcal{P}_{n+2}$, sont vraies.

Comme λ est racine de f : $\lambda^3=\lambda+1$ et en multipliant par λ^n : $\lambda^{n+3}=\lambda^{n+1}+\lambda^n$.

De même pour σ et $\overline{\sigma}$: $\sigma^{n+3}=\sigma^{n+1}+\sigma^n$ et $\overline{\sigma}^{n+3}=\overline{\sigma}^{n+1}+\overline{\sigma}^n$.

Donc d'après $\mathcal{Q}_{n+1}$ et $\mathcal{Q}_n$,

$$u_{n+3}=u_{n+1}+u_n=(\lambda^{n+1}+\sigma^{n+1}+\overline{\sigma}^{n+1})+(\lambda^n+\sigma^n+\overline{\sigma}^n)=\lambda^{n+3}+\sigma^{n+3}+\overline{\sigma}^{n+3}$$

Et donc $\mathcal{Q}_{n+3}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n\in\mathbb{N} : u_n=\lambda^n+\sigma^n+\overline{\sigma}^n}$$

Remarques !

(g) *A noter que σ et $\overline{\sigma}$ sont complexes et non reéls.*

*Mais pour les lignes qui suivent, il faut **voir** $\sigma^n+\overline{\sigma}^n=2Re(\sigma^n)\in\mathbb{R}$*

$\pi\lambda^n=\pi(u_n-\sigma^n-\overline{\sigma}^n)=\pi u_n-\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n)$.

Donc

$$\cos(\pi\lambda^n)=\cos(\pi u_n)\cos(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))+\sin(\pi u_n)\sin(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))$$
$$\cos(\pi\lambda^n)-\cos(\pi u_n)=\cos(\pi u_n)[\cos(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))-1]+\sin(\pi u_n)\sin(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))$$

Or $|\sigma|<1$, donc $(\sigma^n)\to 0$ et $(\overline{\sigma}^n)\to 0$.

Ainsi par continuité de cos et sin :

$$\cos(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))\to\cos(0)=1 \qquad \text{et} \qquad \sin(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))\to\sin 0=0$$

A partir d'un certain rang N_1 : pour tout $n\geqslant N_1$, $\sigma^n+\overline{\sigma}^n))\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et $(\sin(\pi u_n))_n$ est bornée (par 1), donc pour $n\geqslant N_1$

$$-(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n)\leqslant\sin(\pi u_n)\sin(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))\leqslant 1\times(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n)$$

De même on a l'inégalité : $\frac{-x^2}{4}\leqslant 1-\cos x\leqslant\frac{x^2}{4}$ pour $x\in\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

et $(\cos(\pi u_n))_n$ est bornée (par 1), donc pour $n\geqslant N_1$

$$-\frac{1}{2}(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))^2\leqslant\cos(\pi u_n)[\cos(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))-1\leqslant\frac{1}{2}(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))^2$$

Donc, en sommant, puis divisant par m

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{n}\cos(\pi\lambda^n)-w_m\right|\leqslant\frac{1}{2m}\sum_{n=0}^{m}(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))^2+\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m}\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n)$$

Or enfin, $(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))^2=\pi^2(\sigma^2)^n+2\pi^2|(\sigma|^2)^n+\pi^2(\overline{\sigma}^2)^n$.

Il s'agit donc d'attention de terme de suites géométriques de raison respectivement : $\sigma^2,|\sigma|^2,\overline{\sigma}^2,\sigma$ et $\overline{\sigma}$, toute de module plus petite que 1. Donc convergente.

Ainsi, ces sommes sont bornées. La division par m permet d'affirmer que

$$\frac{1}{2m}\sum_{n=0}^{m}(\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n))^2+\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m}\pi(\sigma^n+\overline{\sigma}^n)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0$$

$$\boxed{\text{Ainsi la suite }\left(\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m}\cos(\pi\lambda^n)\right)\text{ diverge vers }\frac{-1}{7}\text{, comme } w_m}$$

3. Equirépartition.

(a) $\theta(e) = e - \lfloor e \rfloor = 2,718281828 \cdots - 2$. A cinq décimal près :

$$\boxed{\theta(e) = 0,71828\ldots}$$

(b) On applique le critère de WEHL. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $p = 1 \in \mathbb{N}$:

$$\exp(2i\pi p a_n) = \exp(2i\pi(\frac{1}{2}\lambda^n - \lfloor\frac{1}{2}\lambda^n\rfloor)) = \exp(2i\pi(\frac{1}{2}\lambda^n)) \times \exp(2i\pi\lfloor\frac{1}{2}\lambda^n\rfloor))$$

Or comme $\lfloor\frac{1}{2}\lambda^n\rfloor \in \mathbb{N}$, $\exp(2i\pi\lfloor\frac{1}{2}\lambda^n\rfloor)) = 1$. Donc

$$\exp(2i\pi p a_n) = \exp(2i\pi(\frac{1}{2}\lambda^n)) = \cos(\pi\lambda^n) + i\sin(\pi\lambda^n)$$

Or, on a vu que $\displaystyle\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m}\cos(\pi\lambda^n)$ converge vers $\frac{-1}{7}$.
Ainsi la suite (a_n) ne vérifie par le critère de WEYL

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) = \theta(\tfrac{1}{2}\lambda^n) \text{ n'est pas équirépartie modulo 1}}$$

(c) Faisons un raisonnement par l'absurde.
Supposons que $\lambda = \frac{p}{q}$, fraction irréductible ($q > 0$ et $p \wedge q = 1$).
Alors comme $f(\lambda) = 0$, on trouve la relation :

$$\frac{p^3}{q^3} - \frac{p}{q} - 1 = 0 \underset{\times q^3}{\Longrightarrow} p^3 - q^2p - q^3 = 0 \Longrightarrow p^3 = q(qp - q^2)$$

Donc $q|p^3$. Tout nombre premier qui divise q divise donc p. Seul possibilité $q = 1$.
Et donc $\lambda \in \mathbb{Z}$. Or $\lambda \in]1,2[$. Nous avons une contradiction.

$$\boxed{\text{le réel } \lambda \text{ n'appartient pas à } \mathbb{Q}.}$$

(d) Soit $q \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant 1$.
Nous avons la somme d'une suite géométrique de raison $s = e^{2\pi i q\lambda} \neq 1$ car $\lambda \notin \mathbb{Q}$:

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i q n\lambda} = \sum_{n=1}^{N} s^n = \frac{1 - s^N}{1 - s}s$$

En prenant le module, comme $|s| = 1$, $|1 - s^N| \leqslant |1| + |s^N| \leqslant 2$:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i q n\lambda}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - s|}$$

Or, avec « l'angle moitié » :

$$1 - s = 1 - e^{2\pi i q\lambda} = e^{\pi i q\lambda}\left(e^{-\pi i q\lambda} - e^{\pi i q\lambda}\right) = 2i\sin(\pi q\lambda)e^{\pi i q\lambda}$$

En prenant le module : $|1 - s| = 2|\sin(\pi q\lambda)|$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } q \in \mathbb{N} \text{ et tout entier } N \geqslant 1, \left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i q n\lambda}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\pi q\lambda)|}}$$

(e) On exploite la même méthode pour commencer qu'en question (b). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$

$$\exp(2i\pi p b_n) = \exp(2i\pi p n\lambda) \times \exp(2\pi p\lfloor rn\lambda\rfloor) = \exp(2i\pi p n\lambda)$$

car $p\lfloor n\lambda\rfloor \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\exp(2i\pi p b_n)\right| \leqslant \frac{1}{m|\sin(\pi p\lambda)|} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{Donc, d'après le critère de WEYL, la suite } (b_n) \text{ est équirépartie}}$$

(f) Ce qui compte c'est que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p\lambda \notin \mathbb{Z}$. C'est bien le cas pour tout $\lambda \notin \mathbb{Q}$

$$\boxed{\text{Le résultat précédent reste valable pour } \lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.}$$