

Devoir à la maison n°2

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Problème

On considère dans tout ce problème la fonction polynomiale :

$$f : x \mapsto x^3 - x - 1$$

1. Etude des racines de f.
   (a) Montrer que f possède une unique racine réelle, notée λ et que $\lambda \in]1, 2[$.
   (b) Soit σ une racine complexe, non réelle de f. Calculer $\lambda|\sigma|^2$.
   Ordonner les réels $|\sigma|$, 1 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Etude de suites.
   On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$u_0 = 3,\ u_1 = 0,\ u_2 = 2, \qquad \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$$
   Puis, on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n = \cos(\pi u_n)$
   (a) Pour $0 \leqslant n \leqslant 10$, calculer u_n et v_n.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs entières.
   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique et préciser sa période.
   (d) Montrer que la suite $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\forall\ m \in \mathbb{N}, \qquad w_m = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m} v_n$$
   converge vers $-\frac{1}{7}$.
   On pourra faire la division euclidienne de m par 7 : $m = 7q_m + r_m$ avec $r_m \in \{0, 1, \dots 6\}$.
   (e) Montrer que $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ est LA solution du système (de Cramer) :
   $$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \lambda x + \sigma y + \overline{\sigma} z = 0 \\ \lambda^2 x + \sigma^2 y + \overline{\sigma}^2 z = 2 \end{cases}$$
   (f) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_n = \lambda^n + \sigma^n + \overline{\sigma}^n$$
   (g) (*) Montrer que la limite de $\left(\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m}\cos(\pi\lambda^n)\right)_m$ pour $m \to +\infty$ n'est pas nulle.
   On donnera sa valeur.

3. Equirépartition.
   On dit qu'une suite (a_n) est équirépartie (modulo 1) si
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in [0, 1]$.
   - Pour tout a, b tels que $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $\frac{1}{n}\text{card}(\{k \mid u_k \in [a, b]\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b - a$

   On admet que (a_n) est équirépartie modulo 1 ssi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} e^{2i\pi p a_m} = 0$.
   C'est cette deuxième caractéristique (appelé, critère de Weyl) qui servira pour la suite.

Enfin, on note pour tout nombre réel x, $\theta(x) = x - \lfloor x \rfloor$, sa partie décimale ($x$ privé de sa partie entière).

(a) Que vaut $\theta(e)$? (On donnera les 5 premiers chiffres significatifs).

(b) En exploitant les parties précédentes, montrer que la suite $a_n = \theta(\frac{1}{2}\lambda^n)$ n'est pas équirépartie (modulo 1).

(c) Montrer que le réel λ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

(d) Montrer que pour tout entier $q \in \mathbb{N}$ et tout entier $m \geqslant 1$,

$$\left| \sum_{n=1}^{m} e^{2\pi i q n \lambda} \right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\pi q \lambda)|}$$

(e) En déduire que la suite $(b_n) = \theta(n\lambda)$ est équirépartie.

(f) Le résultat précédent reste-t-il valable si l'on remplace λ par un nombre irrationnel quelconque.