

## Devoir à la maison n°3

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (\*) voire (\*\*). La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'énoncé des **formules utilisées**.

---

### Exercice

On considère

$$H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (x + y, xy)$$

1. Montrer que l'image de  $\mathbb{R}^2$  par  $H$  est  $S = \{(a, b) \mid b^2 - 4a \geq 0\}$ .

Est-ce que la fonction  $H$  est surjective (de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ ) ?

2. Montrer que  $H$  n'est pas injective.

On note  $\mathcal{R}$ , la relation binaire définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \iff H(x, y) = H(x', y')$$

3. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

4. Pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , donner l'orbite notée  $\mathcal{O}((x, y))$  de  $(x, y)$  pour la relation  $\mathcal{R}$ .  
Quelle est la taille de chaque orbite ?

5. En déduire une description simple de l'ensemble  $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathcal{R}}$ .

6. Montrer que

$$\overline{H} : \{(x, y) \mid x \geq y\} \longrightarrow S, \quad (x, y) \longmapsto (x + y, xy)$$

est bijective.

### Problème

Dans tout ce problème, on désigne par  $\mu$  une application continue  $2\pi$ -périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et on considère l'équation différentielle :

$$(E_\mu) \quad y'' + y = \mu(t)$$

On désigne par  $\varphi_\mu$  la solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_\mu)$  qui vérifie en outre les relations  $\varphi_\mu(0) = \varphi'_\mu(0) = 0$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note :

$$G_\mu(x) = \int_0^x \mu(t) \cos t \, dt \quad \text{et} \quad H_\mu(x) = \int_0^x \mu(t) \sin t \, dt$$

Dans la partie A, on étudie quelques propriétés de la fonction  $\varphi_\mu$ . Dans la partie B, on étudie un exemple explicite.

#### Partie A - Etude des solutions d'un oscillateur paramétré par le second membre

On désigne par  $F_\mu$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F_\mu(x) = (\sin x) G_\mu(x) - (\cos x) H_\mu(x)$ .

Pour simplifier les notations, on écrira  $F, G, H, \varphi$  pour désigner les fonctions  $F_\mu, G_\mu, H_\mu, \varphi_\mu$ .

1. Justifier la dérivabilité de  $G, H$  et donc  $F$ .

Préciser  $F(0)$  et  $F'(0)$ .

2. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et exprimer  $F''(x) + F(x)$  en fonction de  $\mu(x)$ .

3. Justifier l'affirmation  $F = \varphi$ .

4. **Etude du caractère  $2\pi$ -périodique de  $\varphi$ .**

(a) Calculer la dérivée de  $x \mapsto G(x + 2\pi) - G(x)$  et  $x \mapsto H(x + 2\pi) - H(x)$ .

(b) Exprimer  $G(x + 2\pi) - G(x)$  en fonction de  $G(2\pi)$   
et  $H(x + 2\pi) - H(x)$  en fonction de  $H(2\pi)$ .

- (c) Exprimer  $\varphi(x+2\pi) - \varphi(x)$  en fonction de  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $G(2\pi)$ ,  $H(2\pi)$ .
- (d) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur  $G(2\pi)$  et  $H(2\pi)$  la fonction  $\varphi$  est-elle  $2\pi$ -périodique ?
- (e) La fonction  $\varphi$  est-elle  $2\pi$ -périodique lorsque  $\mu(t) = \sin t$  ? (respectivement lorsque  $\mu(t) = \cos t$  ?)
- (f) La fonction  $\varphi$  est-elle bornée lorsque  $\mu(t) = \sin t$  ? (respectivement. lorsque  $\mu(t) = \cos t$  ?)
- (g) Montrer que la fonction  $\varphi$  est  $2\pi$ -périodique lorsque  $\mu(t) = |\sin t|$ .
- (h) Les fonctions  $\varphi$ ,  $\varphi'$  et  $\varphi''$  sont-elles bornées lorsque  $\mu(t) = |\sin t|$  ?

Dans toute la suite du problème, on suppose que  $\mu(t) = |\sin t|$ .

**Partie B - Calcul de  $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \varphi(t) dt$**

1. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} |\sin t| dt$ .

- (a) Calculer  $v_0$ .
- (b) Montrer qu'il existe un nombre réel  $\rho$  (que l'on explicitera) tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on ait  $v_n = \rho^n v_0$ .
- (c) En déduire la convergence de la suite  $\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)_n$  et expliciter sa limite (somme) notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .

(d) En déduire la limite  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-t} |\sin t| dt$ , notée  $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t} |\sin t| dt$ .

On doit trouver  $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t} |\sin t| dt = \frac{1}{2} \coth \frac{\pi}{2}$

2. Calcul de  $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \varphi(t) dt$

(a) Soit  $X > 0$ . Etablir une relation entre  $\int_0^X e^{-t} \mu(t) dt$  et  $\int_0^X e^{-t} \varphi(t) dt$ .

(b) A quelle relation cela conduit-il pour  $X \rightarrow +\infty$

En conclusion, on notera cette relation à l'aide des notations  $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \mu(t) dt$  et  $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \varphi(t) dt$ .

(c) En déduire  $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \varphi(t) dt$  (pour  $\mu = |\sin|$ ).

On conservera les conventions d'écriture vues plus haut