MPSI 3 - Fermat Le 11.10.19
2019-2020

Devoir surveillé n°2

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème. Série de Fourier. Noyau de Fejer

Notations :

- On note $\mathcal{C}_{2\pi}$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et à valeurs complexes.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k \in \mathcal{C}_{2\pi}$, définie par :
$$e_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto e^{ikt}$$
- A chaque application $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et entier $k \in \mathbb{Z}$, on associe le nombre complexe $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t$.
- On définit le produit de convolution $*$ de deux fonctions f, g de $\mathcal{C}_{2\pi}$ par :
$$\forall\ f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}, \qquad f * g : x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$
- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$, le sous-ensemble de $\mathcal{C}_{2\pi}$:
$$\mathcal{P}_n = \left\{ f \in \mathcal{C}_{2\pi} \mid \exists\ (a_{-n}, a_{-n+1}, \dots a_0, a_1, \dots a_n) \in \mathbb{C}^{2n+1} \text{ tel que } f = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \right\}$$
  on parle de l'ensemble des fonctions polynomiales trigonométriques de degré inférieur à n.
- Puis pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $D_n : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e_k(t)$. On a donc $D_n \in \mathcal{P}_n$
- On note alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k$.
- Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |f(x_0)|$, on note $\|f\|_\infty$ ce majorant $|f(x_0)|$. Ainsi, dans ce cas :
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$$

Résultats admis :

- On admet que si deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{C}_{2\pi}$.
- On admet que si f et g sont continue sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, alors $f + g$ est continue sur I.
- On admet le théorème de WEIERSTRASS (utilisé en partie B., C.& D.) :
  Si f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors
  $\exists\ x_0 \in [a, b]$ *tel que* $\forall\ x \in [a, b]$, $|f(x)| \leqslant |f(x_0)|$.
- On admet le théorème de HEINE (utilisé en partie D.) :
  Si f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors
  $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \alpha > 0$ *tel que* $\forall\ x_1, x_2 \in [a, b]\ :\ |x_1 - x_2| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \epsilon$.
  On dit dans ce cas, que f est uniformément continue sur $[a, b]$

Objectifs

Dans la première partie, on étudie les propriétés algébriques du produit de convolution, on justifie le calcul c_k et on étudie l'ensemble $\mathcal{P}_n$.
Dans la seconde partie, à l'aide du théorème de WEIERSTRASS, on justifie l'existence du nombre $\|f\|_\infty$, que l'on étudie en lien avec le produit de convolution
Dans la troisième partie, on étudie les noyaux de DIRICHLET et de FEJER qui associe à f deux fonctions (série de fonctions) $f * D_n$ et $f * K_n$ respectivement.
Pour finir, en quatrième partie, on démontre la convergence uniforme de $f * K_n$ vers f.

A. Convolution

On considère deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ quelconques et fixées pour l'ensemble de ces questions.

1. Montrer que $f * g$ est 2π périodiques.
   On admettra pour la suite que $f * g \in \mathcal{C}_{2\pi}$.
2. Montrer que $f * g = g * f$
3. Montrer que $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ avec $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_{2\pi}$.
   On admettra pour la suite que :
   $$\forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m \in \mathbb{C},\ \forall\, g_1, g_2, \dots g_m \in \mathcal{C}_{2\pi},\ f * \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (f * g_j).$$
   Cela se démontre par récurrence sans difficulté.
4. Soient $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Montrer que $c_k(e_\ell) = \delta_{k,\ell}$ où par définition $\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases}$.
5. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, comment exprimer simplement $f * e_k$ en fonction de $c_k(f)$?
   En déduire une expression simple de $e_k * e_\ell$ pour tout $k, \ell \in \mathbb{Z}$.
   On pourra de nouveau exploiter le symbole de KRONECKER : $\delta_{k,\ell}$.
6. Montrer que c_k est linéaire :
   $$\forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{C},\ \forall\, g_1, \dots g_m \in \mathcal{C}_{2\pi}\ :\ c_k\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_k(g_j)$$
   Quelle expression simple en déduire de $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_k(g_j) e_k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$?
7. Montrer également que, pour tout $P \in \mathcal{P}_n$, $f * P \in \mathcal{P}_n$.
   Préciser le calcul $f * D_n$ en fonction de $(c_k(f))_k$.
8. Montrer que pour toute polynôme trigonométrique P de $\mathcal{P}_n$, on a $P = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(P) e_k$.

B. Continuité et théorème de Weierstrass

1. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$.
   Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 2\pi]$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant f(x_0)$.

Ainsi, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, le majorant $\|f\|_\infty$ existe.

2. Montrer que $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \times \|g\|_\infty$.

C. Noyau de Fejer

On rappelle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, D_n est l'élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$ de définition $D_n : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e_k(t)$.

On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k$.

1. Etablir que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(K_n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|k|}{n+1} & \text{si } |k| \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e_k$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin \frac{t}{2}} & \text{si } t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \left(\dfrac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2 & \text{si } t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc K_n est un polynôme trigonométrique (question 2.) et à valeurs positives (question 4.).

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} K_n(t)\mathrm{d}t = 1$.

6. Etablir que, pour tout $\alpha \in]0, \pi]$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_\alpha^\pi K_n(t) = 0$.
On pourra appliquer le théorème de Weierstrass *à* $g_{|[\alpha, 2\pi-\alpha]}$ *où* $g : t \mapsto \frac{1}{\sin^2 t/2}$.

7. En exploitant les deux expressions de $K_n(x)$ (questions 2 et 4), exprimer de manière simple le nombre
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \text{ pour tout } d \in [\![1, n]\!]$$
.

D. Approximation de $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ par la méthode de Fejer

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$, fixé.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) - (f * K_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))K_n(t)\mathrm{d}t$$

2. On fixe $\epsilon > 0$, pour toute cette partie D.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, t \in [-\pi, \pi]\ :\ |t| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x-t)| \leqslant \epsilon$

3. On considère le nombre α de la question précédente. Quitte à le remplacer par $\min(\alpha, \frac{\pi}{2})$,
on suppose donc que $\alpha \in]0, \pi[$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}, t \in [-\pi, \pi] : |t| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x-t)| \leqslant \epsilon$.
Montrer que
$$\|f - f * K_n\|_\infty \leqslant \epsilon + \frac{2}{\pi}\|f\|_\infty \int_\alpha^\pi K_n(t)\mathrm{d}t$$

4. A l'aide de 2.5., conclure qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\|f - f * K_n\|_\infty \leqslant 2\epsilon$.
Qu'avons-nous démontré par cette inégalité ?