MPSI 3 - Fermat Le 16.11.19
2019-2020

Devoir surveillé n°3

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice : EDL d'ordre 2 à coefficients non constants /14

On considère dans ce problème l'équation différentielle d'ordre 2, à coefficients non constants, de la variable x définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0 \qquad (E)$$

1. On note, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$.
   Montrer que f_α est solution de (E) si et seulement si $\alpha = -1$.
2. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. On note $h_g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x}$.
   (a) Montrer que g est deux fois-dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement h_g l'est également.
   (b) Montrer que g est solution de (E) si et seulement h_g' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, notée (E')
   (c) Résoudre (E')
   (d) En déduire que :
   g est solution de (E) si et seulement si il existe A, $B \in \mathbb{R}$ tels que $g : x \mapsto \dfrac{A + B\ln x}{x}$
3. Montrer que, pour tout couple $(y_1, y_1') \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2y'' + 3xy' + y & = & 0 \\ y(1) & = & y_1 \\ y'(1) & = & y_1' \end{array}\right.$$

   admet une unique solution que l'on exprimera explicitement en fonction de (y_1, y_1').

Problème. Fractions continues

Notations :

- On note avec une lettre majuscule $A = (a_0, a_1, \dots a_n \dots)$ les suites numériques à coefficents dans $\mathbb{N}$.
  Si $a_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \geqslant 1$, $a_k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{N} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de ces suites.
- A toute suite numérique A, et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on associe la fraction rationnelle

$$r_n(A) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

- On note, pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$, la partie entière de x et $\theta(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sa partie décimale.
  On a donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\theta(x) \in [0, 1[$.
- On dit x est un nombre quadratique si $x \notin \mathbb{Q}$ et est racine d'un polynôme à coefficients entiers de degré 2.

Objectifs

Dans ce problème, on étudie le développement en fractions continues de nombres réels.
Dans la première partie, on démontre que l'on définit bien ainsi des nombres réels.
Dans la seconde partie, on démontre que cette écriture est bijective dans $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$.
Dans la troisième partie, on étudie une relation d'équivalence (naturelle en théorie des formes modulaires) qui permet de conclure sur un théorème non trivial de Lagrange ; ce théorème permet de différencier les nombres quadratiques des autres irrationnels.

A. Deux suites définies par récurrence /14

On considère dans cette partie, une suite $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers positifs, et strictement positif pour $n \geqslant 1$.
On définit alors par récurrence les deux suites $(p_n)_{n\geqslant -2}$ et $(q_n)_{n\geqslant -2}$ par :

$$p_{-2} = q_{-1} = 0\,;\ p_{-1} = q_{-2} = 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} p_n & = & a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n & = & a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{array} \right.$$

On notera bien que ces suites dépendent de A. Par la suite, si nécessaire, on écrira $p_n(A)$ et $q_n(A)$ pour désigner de telles suites.

1. Etude des suites (p_n) et (q_n).
   (a) Exprimer p_0, p_1, p_2 et q_0, q_1, q_2 en fonction de A.
   (b) Vérifier que $\dfrac{p_2}{q_2} = r_2(A)$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n \geqslant n$.
   (d) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$.
   (e) En déduire que la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ est irréductible.
2. Lien avec $r_n(A)$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + x}}}$$

   On admet qu'il n'y a pas de problème de définition (on additionne des nombres positifs, qui ne s'annule pas).
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
   Donner les valeurs x_1 et x_2 (qui dépend de x) tels que $R_n(x_1) = r_n(A)$ et $R_n(x_2) = R_{n+1}(x)$
   (b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$R_n(x) = \frac{p_{n-1}x + p_n}{q_{n-1}x + q_n}$$

   (c) Conclure : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $r_n(A) = \dfrac{p_n}{q_n}$.

On écrit par la suite r_n pour désigner $r_n(A)$

3. Définition de $\tilde{A}$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, simplifier $r_{k+1} - r_k$ puis montrer que $r_{k+2} - r_k = \dfrac{(-1)^k a_{k+2}}{q_{k+2}q_k}$
   (b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = r_{2n}$ et $d_n = r_{2n+1}$.
   Déduire des questions précédentes que $\big([c_n, d_n]\big)$ est une suite de segment emboîtés rationnels de limite nulle.

   On note $\tilde{A}$, le nombre réel obtenu à partir de ces segments emboités : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_n \leqslant \tilde{A} \leqslant d_n$.

B. Bijection $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q} \\ A & \longmapsto & \tilde{A} \end{array}$ /26

On rappelle que $\theta : \mathbb{R} \to [0,1[$, $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, partie décimale de x.
On définit également, $\Omega : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{\theta(x)}$.

1. Etude de Ω.
   (a) Est-ce que θ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[0,1[$? Est-ce que θ est injective ?
   (b) Montrer que $\theta(\mathbb{Q}) = (\mathbb{Q} \cap [0,1[)$ et $\theta(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1[)$
   (c) Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est stable par Ω.

D'après la question précédente, on peut donc associer à tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ et $m \in \mathbb{N}$, le nombre

$$\xi_m(x) = \Omega^m(x) = \underbrace{\Omega \circ \Omega \circ \cdots \circ \Omega}_{m \text{ fois}}(x)$$

où $\Omega^0 = \mathrm{id}$. On définit également la suite $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n(x) = \lfloor \xi_n(x) \rfloor$.
Si le nombre x est clairement sous-entendu, on pourra écrire ξ_m (resp. a_n) au lieu de $\xi_m(x)$ (resp. $a_n(x)$).

2. Etude d'un exemple. On considère $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (a) Calculer a_0, puis montrer que $\xi_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = x$
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de a_n et de ξ_n
3. Développement en fraction continue de x.
   On considère un nombre x, <u>réel strictement positif,</u> <u>non rationnel</u>, quelconque et fixé.
   (a) Montrer que pour tout $p, s \in \mathbb{N}$, $\xi_{p+s} = \Omega^s(\xi_p)$.
   (b) Montrer que $a_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathbb{N}^*$.
   On note alors $A = (a_0, a_1, \dots a_n \dots)$ comme en partie précédente.
   (c) Montrer que pour tout entier n :
   $$x = \frac{p_{n-2} + \xi_n p_{n-1}}{q_{n-2} + \xi_n q_{n-1}}$$
   Les suites $(p_n)_{n\geqslant -2}$ et $(q_n)_{n\geqslant -2}$ sont définies par récurrence à partir de (a_n) en partie A.
   (d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $r_{2n}(A) \leqslant x \leqslant r_{2n+1}(A)$
   (e) En déduire que $x = \tilde{A}$.
   Comment qualifier alors l'application
   $$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}} & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q} \\ A & \longmapsto & \widetilde{A} \end{array} \quad ?$$
   (f) Donner un antécédent de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ par F.
4. Unicité d'écriture. Soit A une suite quelconque et $x = \tilde{A}$.
   Pour ne pas confondre on va alors noter $\alpha_n = \lfloor \xi_n(x) \rfloor$ à partir de x, dans un second temps.
   (a) Montrer que nécessairement $a_0 = \alpha_0$.
   (b) Puis montrer que, nécessairement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha_n$.
   Qu'en déduire pour F
5. Extraction.
   Montrer que, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $\xi_m = \widetilde{B}$, où B est la suite extraite de A de rang m
   C'est-à-dire : $B = (a_m, a_{m+1}, \dots) = (a_n)_{n\geqslant m}$.

C. Une classe d'équivalence sur les fractions continues /26

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que x est congruent à y et on note $x \simeq y$,
si il existe $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \dfrac{ay+b}{cy+d}$ avec $ad - bc \in \{-1, 1\}$.

1. Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence.
2. Classe de 0
   (a) Soit $r \simeq 0$. Montrer que $r \in \mathbb{Q}$.
   (b) Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec p et q irréductibles.
   On admet qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $up + vq = 1$ (Relation de Bézout).
   Montrer que r est congruent 0.
   (c) Quel est l'ensemble $\overline{0}$ des éléments congrus à 0 ?
3. Classe d'un irrationnel.
   On admet le résultat suivant :

   $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } y = \dfrac{P\zeta + R}{Q\zeta + S} \text{ avec } Q > S > 0 \text{ et } PS - QR = \pm 1 \\ \text{alors il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \dfrac{R}{S} = r_{n-1}(y) \text{ et } \dfrac{P}{Q} = r_n(y)\end{array}}$$

   Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe donc $A \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ tel que $x = \tilde{A}$
   (a) Complément sur le théorème admis.
   Montrer que sous ces hypothèses, nécessairement $\zeta = \xi_{n+1}(y)$.
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $\xi_m = \Omega^m(x)$.
   On a vu en B. 5. que $\xi_m = [a_m, a_{m+1}, \ldots a_r \ldots]$.
   Montrer en exploitant A.1.(d) et B.3. que $x \simeq \xi_m$.
   (c) Supposons que $y \simeq x$ Pour fixer les choses, on note $y = \dfrac{Ax+B}{Cx+D}$ avec $AD - BC = \pm 1$.
   Montrer que $\forall\ m \in \mathbb{N}$, $y \simeq \xi_m$
   (d) On conserve les notations (p_n) et (q_n) définie à partir de x.
   En exploitant les inégalités de A.3.(b) et la majoration de A.3.(a), montrer que
   $$\forall\ m \in \mathbb{N}, \qquad |x - r_m| < \frac{1}{q_m^2}$$
   (e) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $\delta_m \in]-1, 1[$ tels que $p_{m-1} = xq_{m-1} + \dfrac{\delta_m}{q_{m-1}}$.
   (f) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $Cp_{m-1} + Dq_{m1} > Cp_{m-2} + Dq_{m-2} > 0$
   (g) En exploitant le résultat admis, en déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y = \dfrac{p_{n-1}(y)\xi_m + p_{n-2}(y)}{q_{n-1}(y)\xi_m + q_{n-2}(y)}$.
   (h) En déduire que si $x \simeq y$, et si $x = \widetilde{A}$ et $y = \widetilde{B}$,
   alors il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $(a_h)_{h \geqslant m} = (b_h)_{h \geqslant n}$.
4. Nombre quadratique.
   On dit que x a un développement en fraction continue périodique s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $\xi_{m+k} = \xi_m$.
   (a) Montrer que s'il existe $(m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\xi_{m+k} = \xi_m$,
   alors pour tout $s > m$, $\xi_{s+k} = \xi_s$.
   (b) Montrer également que $\xi_m = \dfrac{A\xi_m + B}{C\xi_m + D}$ avec $A, B, C, D \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire que si x admet un développement en fraction continue périodique, x est quadratique.
   (d) Réciproquement, supposons que x est un nombre quadratique.
   (**) Montrer que x admet un développement en fraction continue périodique...