

Devoir surveillé n°3 CORRECTION

Exercice : EDL d'ordre 2 à coefficients non constants

On considère dans ce problème l'équation différentielle d'ordre 2, à coefficient non constants, de la variable x définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0 \quad (E)$$

1. On note, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$.

f_α est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $f''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.

f_α solution de $(E) \iff \forall x > 0, \alpha(\alpha-1)x^\alpha + 3\alpha x^\alpha + x^\alpha = 0 \iff (\alpha^2 + 2\alpha + 1) = (\alpha+1)^2 = 0$

/2,5

f_α est solution de (E) si et seulement si $\alpha = -1$.

2. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. On note $h_g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{g(x)}{x}$.

- (a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

Donc par produit :

/2

g est deux fois-dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si h_g l'est également.

- (b) On suppose que ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^2$.

(ce sera nécessaire pour que l'une ou l'autre solution d'une équation différentielle d'ordre 2).

Dans ce cas, pour tout $x > 0$, $h_g(x) = xg(x)$, donc $h'_g(x) = xg'(x) + g(x)$ et $h''_g(x) = xg''(x) + 2g'(x)$.

Ainsi pour tout $x > 0$, $x^2 g''(x) = xh''_g(x) - 2xg'(x)$

$$\begin{aligned} g \text{ solution de } (E) &\iff \forall x > 0, x^2 g''(x) + 3xg'(x) + g(x) = 0 \\ &\iff \forall x > 0, xh''_g(x) - 2xg'(x) + 3xg'(x) + g(x) = 0 \\ &\iff \forall x > 0, xh''_g(x) + xg'(x) + g(x) = xh''_g(x) + h'_g(x) = 0 \end{aligned}$$

/2,5

g solution de (E) si et seulement si h'_g solution de $(E') : xy' + y = 0$

- (c) C'est une équation homogène d'ordre 1

/2

$$S_{(E')} = \{x \mapsto \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- (d) On intègre les solutions précédentes, on trouve alors

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid \forall x > 0, h_g(x) = \lambda \ln(x) + \mu$$

Et comme, pour tout $x > 0$ $g(x) = \frac{1}{x} h_g(x)$

/2

g est solution de (E) si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $g : x \mapsto \frac{\mu + \lambda \ln x}{x}$

3. Soit g une solution de problème de CAUCHY $\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' + y = 0 \\ y(1) = y_1 \\ y'(1) = y'_1 \end{cases}$

Alors comme g est solution de (E) , il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $g : x \mapsto \frac{\lambda \ln x + \mu}{x}$.

Puis $g(1) = \mu = y_1$

et pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{\lambda - \lambda \ln x - \mu}{x^2}$, donc $g'(1) = \lambda - \mu = y'_1$.

On trouve donc $\mu = y_1$ et $\lambda = y'_1 + y_1$

/3

$\forall (y_1, y'_1) \in \mathbb{R}^2$, le problème $\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' + y = 0 \\ y(1) = y_1 \\ y'(1) = y'_1 \end{cases}$ admet une unique solution : $x \mapsto \frac{y_1 + (y'_1 + y_1) \ln x}{x}$

Problème. Fractions continues

A. Deux suites définies par récurrence

1. Etude des suites (p_n) et (q_n) .

(a) C'est direct :

/1

$$\begin{array}{lll} p_0 = a_0 & p_1 = a_0 a_1 + 1 & p_2 = a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0 \\ q_0 = 1 & q_1 = a_1 & p_2 = a_1 a_2 + 1 \end{array}$$

(b) On sait que

$$r_2(A) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}$$

/1

$$\frac{p_2}{q_2} = r_2(A)$$

(c) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n : \ll q_n \geq n \gg$

— $q_0 = 1 > 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— $q_1 = a_1 q_0 + q_{-1} = a_1 q_0 \geq q_0 = 1$, car $a_1 \in \mathbb{N}^*$
Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— $q_2 = a_2 q_1 + q_0 \geq 1 + 1 = 2$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.

$$q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n \underset{a_{n+2} \in \mathbb{N}^*}{\geq} q_{n+1} + q_n \underset{\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_{n+1}}{\geq} n + 1 + n = 2n + 1n + 2$$

car $n \geq 1$, donc $2n + 1 \geq n + 1 + 1 = n + 2$.

Donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

/1,5

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n \geq n$$

Remarques !

En fait dans le pire des cas, $a_k = 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $q_{n+2} = q_{n+1} + q_n$.

Alors q_n est la suite de FIBONACCI, on trouve plutôt $q_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$, ce qui diverge beaucoup

plus vite vers $+\infty$

(d) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1}$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= p_{n+2} q_{n+1} - p_{n+1} q_{n+2} = (a_{n+2} p_{n+1} + p_n) q_{n+1} - p_{n+1} (a_{n+2} q_{n+1} + q_n) \\ &= p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = -x_n \end{aligned}$$

donc la suite (x_n) est géométrique de raison (-1) . Son premier terme est $x_0 = p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1)1 - a_0 a_1 = 1$.

/1

$$\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}, x_n = p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n.$$

(e) Soit δ un diviseur commun de p_n et q_n .

Alors il existe P et Q tels que $p_n = \delta P$ et $q_n = \delta Q$.

Ainsi $p_{n+1} \delta Q - q_{n+1} \delta P = \delta (p_{n+1} Q - q_{n+1} P) = (-1)^n$. Donc δ divise 1.

La seule possibilité : $\delta \in \{-1, 1\}$,

/1

$$\text{la fraction } \frac{p_n}{q_n} \text{ est irréductible.}$$

Remarques !

On peut également invoquer le théorème de BÉZOUT, mais nous ne l'avons pas encore vu.

2. Lien avec $r_n(A)$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + x}}}}$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

C'est tout simple, si $x_1 = 0$, on trouve $r_n : R_n(0) = r_n$.

Puis, par définition en notant $x_2 = \frac{1}{a_{n+1} + x}$:

$$R_{n+1}(x) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1} + x}}}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + x_2}}}} = R_n(x_2)$$

/1,5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $r_n = R_n(0)$ et $R_{n+1}(x) = R_n\left(\frac{1}{a_{n+1} + x}\right)$.

(b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n : \ll \forall x \geq 0, R_n(x) = \frac{p_{n-1}x + p_n}{q_{n-1}x + q_n} \gg$.

— $R_0(x) = a_0 + x = \frac{1x + a_0}{0x + 1} = \frac{p_{-1}x + p_0}{q_{-1}x + q_0}$ d'après les calculs faits plus haut.

Donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.

Soit $x \geq 0$, d'après $\mathcal{Q}_n$ (avec $x_2 \geq 0$ définit plus haut) :

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= R_n(x_2) = \frac{p_{n-1}x_2 + p_n}{q_{n-1}x_2 + q_n} = \frac{p_{n-1}\frac{1}{a_{n+1} + x} + p_n}{q_{n-1}\frac{1}{a_{n+1} + x} + q_n} = \frac{p_{n-1} + p_n(a_{n+1} + x)}{q_{n-1} + q_n(a_{n+1} + x)} \\ &= \frac{p_nx + (a_{n+1}p_n + p_{n-1})}{q_n + (a_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{p_nx + p_{n+1}}{q_nx + q_{n+1}} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, la récurrence est démontrée :

/2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, R_n(x) = \frac{p_{n-1}x + p_n}{q_{n-1}x + q_n}$$

Remarques !

On peut voir les choses d'une autre façon.

Lorsqu'on « remonte » la fraction qui définit $R_n(x)$, on trouve toujours des numérateurs et des dénominateurs de la forme $\alpha x + \beta$.

Donc nécessairement $R_n(x) = \frac{Ax + B}{Cx + D}$, où A, B, C et D sont à trouver.

Mais par ailleurs, $R_n(0) = \frac{B}{D} = r_n = \frac{p_n}{q_n}$, donc $B = p_n$, $D = q_n$

Et $R_n(\infty) = \frac{A}{C} = r_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, donc $A = p_{n-1}$ et $C = q_{n-1}$.

Cela permet de « retrouver » la formule de récurrence, par un raisonnement à la physicienne

(c) Donc, en prenant $x = 0$

/1

$$\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}, r_n(A) = R_n(0) = \frac{p_n}{q_n}.$$

On écrit par la suite r_n pour désigner $r_n(A)$

3. Définition de $\tilde{A}$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$r_{k+1} - r_k = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k+1}q_k - q_{k+1}p_k}{q_kq_{k+1}} = \frac{(-1)^k}{q_kq_{k+1}}$$

Puis :

$$\begin{aligned} r_{k+2} - r_k &= (r_{k+2} - r_{k+1}) + (r_{k+1} - r_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k+2}q_{k+1}} - \frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_k} = (-1)^k \left(\frac{-1}{q_{k+2}q_{k+1}} + \frac{1}{q_{k+1}q_k} \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{q_{k+2}q_{k+1}q_k} (-q_k + q_{k+2}) \end{aligned}$$

Or $q_{k+2} = a_{k+2}q_{k+1} + q_k$, donc $q_{k+2} - q_k = a_{k+2}q_{k+1}$.

En simplifiant par q_{k+1} :

/2

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $r_{k+1} - r_k = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}$ et $r_{k+2} - r_k = \frac{(-1)^k a_{k+2}}{q_{k+2} q_k}$.

☀️ **A la première lecture...**

(b) Soyons bien attentif, il s'agit de suite extraites paires et impaires.

Ainsi, les termes de la suite (r_{2n}) sont exactement $(r_0, r_2, r_4, r_6 \dots)$.

Ainsi le n^{e} terme de cette suite est r_{2n} . Et deux termes consécutifs sont r_{2n} et $r_{2(n+1)} = r_{2n+2}$.

De même, les termes de la suite (r_{2n+1}) sont exactement $(r_1, r_3, r_5, r_7 \dots)$.

Ainsi le n^{e} terme de cette suite est r_{2n+1} . Et deux termes consécutifs : r_{2n+1} et $r_{2(n+1)+1} = r_{2n+3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

- $c_n = r_{2n} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \in \mathbb{Q}$ et $d_n = r_{2n+1} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \in \mathbb{Q}$

- $c_{n+1} - c_n = r_{2n+2} - r_{2n} = \frac{(-1)^{2n} a_{2n+2}}{q_{2n+2} q_{2n}} > 0$, donc (c_n) est croissante.

- $d_{n+1} - d_n = r_{2n+3} - r_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1} a_{2n+3}}{q_{2n+3} q_{2n+1}} < 0$, donc (d_n) est décroissante.

- $d_n - c_n = r_{2n+1} - r_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n+1} q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n+1} q_{2n}} \leq \frac{1}{(2n)(2n+1)} \rightarrow 0$.

/2

Ainsi $[c_n, d_n]$ est une suite de segments emboîtés rationnels.

On note $\tilde{A}$, le nombre réel obtenu à partir de ces segments emboîtés : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \leq \tilde{A} \leq d_n$.

B. Bijection $\mathbb{N} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{Q}, A \mapsto \bar{A}$

1. Etude de $\Omega : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1[$.

(a) Soit $y \in [0, 1[$, alors $\lfloor y \rfloor = 0$ et donc $\theta(y) = y$.

Donc, il existe $x (= y) \in \mathbb{R}$ tel que $y = \theta(x)$. Donc θ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[0, 1[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = (x+1) - (\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor = \theta(x)$.

Or $x+1 \neq x$. Donc θ n'est pas injective.

/1,5

θ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[0, 1[$, mais θ n'est pas injective.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.

- si $x \in \mathbb{Q}$, $\theta(x) = x - \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Q}$, car $\mathbb{Q}$ est un corps.

Donc $\theta(\mathbb{Q}) \subset (\mathbb{Q} \cap [0, 1[)$ (car θ est à valeurs dans $[0, 1[$).

Comme pour la surjectivité de θ , si $y \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1[)$, alors $y = \theta(y) \in \theta(\mathbb{Q})$ car $y \in \mathbb{Q}$.

Ainsi $(\mathbb{Q} \cap [0, 1[) \subset \theta(\mathbb{Q})$.

Par double inclusion : $\theta(\mathbb{Q}) = (\mathbb{Q} \cap [0, 1[)$.

- si $x \notin \mathbb{Q}$, alors si $\theta(x) \in \mathbb{Q}$, $x = \lfloor x \rfloor + \theta(x) \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux. Donc $\theta(x) \notin \mathbb{Q}$.

Donc $\theta(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1[)$ (car θ est à valeurs dans $[0, 1[$).

Comme plus haut, si $y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1[)$, alors $y = \theta(y) \in \theta(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ car $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ainsi $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1[) \subset \theta(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Par double inclusion : $\theta(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1[)$.

/2

$\theta(\mathbb{Q}) = (\mathbb{Q} \cap [0, 1[)$ et $\theta(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1[)$

(c) Clairement : $y = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^* \iff \frac{1}{y} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}^*$.

Donc si $X \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (donc $x \neq 0$), alors $\frac{1}{X} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

Donc si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ d'après (b) : $X = \theta(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et donc $\Omega(x) = \frac{1}{\theta(x)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

/1,5

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ est stable par } \Omega}$$

2. Etude d'un exemple.

(a) $2 < \sqrt{5} < 3$ (il suffit d'élever au carré pour vérifier).

Donc $\frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$, donc $a_0 = \lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rfloor = 1$.

Et donc $\theta(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - a_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ainsi $\xi_1 = \frac{1}{\theta(\frac{1+\sqrt{5}}{2})} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}^2-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = x$

/2

$$\boxed{a_0 = 1 \text{ et } \xi_1 = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = x}$$

(b) La suite $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est donc constante de valeur égale à x .

Et donc (a_n) est également constante, de valeur égale à 1.

/1

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \xi_n = x, \quad a_n = 1}$$

3. Développement en fraction continue de x .

(a) Soit $p, s \in \mathbb{N}$,

$$\xi_{p+s} = \Omega^{p+s}(x) = (\Omega^s \circ \Omega^p)(x) = \Omega^s(\Omega^p(x)) = \Omega^s(\xi_p)$$

/1,5

$$\boxed{\text{Pour tout } p, s \in \mathbb{N}, \quad \xi_{p+s} = \Omega^s(\xi_p).}$$

(b) $x \neq 0$, donc $a_0 = \lfloor \xi_0 \rfloor = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\xi_{n-1} \in [0, 1[\cap(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset]0, 1[$.

Donc $0 < \xi_{n-1} < 1$ et donc $\frac{1}{\xi_{n-1}} > 1$ et donc $a_n = \lfloor \frac{1}{\xi_{n-1}} \rfloor \geq 1$.

/1,5

$$\boxed{a_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \in \mathbb{N}^* .}$$

On note alors $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ comme en partie précédente.

(c) On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \frac{p_{n-2} + \xi_n p_{n-1}}{q_{n-2} + \xi_n q_{n-1}}$.

On va faire apparaître

$$\xi_{n+1} = \Omega(\xi_n) = \frac{1}{\theta(\xi_n)} = \frac{1}{\xi_n - \lfloor \xi_n \rfloor} = \frac{1}{\xi_n - a_n}$$

Donc $\xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}$.

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{p_{n-2} + \left(a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}\right) p_{n-1}}{q_{n-2} + \left(a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}\right) q_{n-1}} \\ &= \frac{(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1} \frac{1}{\xi_{n+1}}}{(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1} \frac{1}{\xi_{n+1}}} \\ &= \frac{p_n + p_{n-1} \frac{1}{\xi_{n+1}}}{q_n + q_{n-1} \frac{1}{\xi_{n+1}}} = \frac{p_n \xi_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \xi_{n+1} + q_{n-1}} = y_{n+1} \end{aligned}$$

où pour finir, on a multiplié numérateur et dénominateur par ξ_{n+1} .

Donc la suite y_n est constante et vaut

$$y_0 = \frac{p_{-2} + \xi_0 p_{-1}}{q_{-2} + \xi_0 q_{-1}} = \frac{0 + x \times 1}{1 + x \times 0} = x$$

/3

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n : x = \frac{p_{n-2}(A) + \xi_n p_{n-1}(A)}{q_{n-2}(A) + \xi_n q_{n-1}(A)}}$$

○ Remarques !

⚡ On notera en fait que $x = R_n(\frac{1}{\xi_{n+1}}) \dots$

⚡ En fait ici, on a $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on crée alors $A(x)$ et on cherche à savoir si $\widetilde{A(x)} = x \dots$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, (on continue de supprimer le lien avec A , encombrant dans les calculs) :

$$x - r_n(A) = \frac{p_n + \xi_n p_{n-1}}{q_n + \xi_n q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\xi_n(p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1})}{q_n(q_n + \xi_n q_{n-1})}$$

Puis, comme $p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = -(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$,

$$x - r_n(A) = \frac{(-1)^n}{q_n} \frac{\xi_n}{q_n + \xi_n q_{n-1}}$$

Or $q_n \in \mathbb{N}$, $\xi_n \in]0, 1[$, donc $x - r_n(A)$ est du signe de $(-1)^n$.

Ainsi $x - r_{2n}(A) \geq 0$ et $x - r_{2n+1}(A) \leq 0$.

/2

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : r_{2n}(A) \leq x \leq r_{2n+1}(A)}$$

(e) D'après la première partie les segments $[r_{2n}(A), r_{2n+1}(A)]$ sont emboîtés, donc ne définissent qu'un unique point (ici x et $\tilde{A}$).

$$\boxed{\text{Donc } x = \tilde{A}.$$

Ainsi, tout élément $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ admet un antécédent A par F .

/1,5

$$\boxed{\begin{array}{ccc} F : \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}} & \mapsto & \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q} \\ A & \mapsto & \tilde{A} \end{array} \text{ est surjective}}$$

(f) D'après la question 2.(b), on a

/1,5

$$\boxed{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = F((1, 1, 1, \dots, 1, \dots)) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

4. Unicité d'écriture. Soit A une suite quelconque et $x = \tilde{A}$.

Pour ne pas confondre on va alors noter $\alpha_n = \lfloor \xi_n(x) \rfloor$ défini à partir de x , dans un second temps.

(a) On a vu $r_0 \leq x \leq r_1$. Or $r_0 = a_0$ et $r_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} \in [a_0, 1[$.

Donc nécessairement $x \in [a_0, a_0 + 1[$. Et comme $a_0 \in \mathbb{N}$:

/1,5

$$\boxed{\text{Nécessairement } \lfloor x \rfloor = a_0 = \alpha_0.}$$

(b) On démontre le résultat par récurrence (forte). On note $\mathcal{Q}_n : \ll a_n = \alpha_n \gg$

— $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \leq n$, $\mathcal{Q}_k$ est vraie.

On a alors pour tout $k \leq n$, $a_k = \alpha_k$ et les mêmes coefficients pour p_k , q_k et r_k .

En reprenant les notations de la partie A

$$R_n\left(\frac{1}{t}\right) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{t}}}} = \frac{p_{n-1}\frac{1}{t} + p_n}{q_{n-1}\frac{1}{t} + q_n} = \frac{p_{n-1} + p_n t}{q_{n-1} + q_n t}$$

On a vu que $x = \frac{p_{n-1} + p_n \xi_{n+1}}{q_{n-1} + q_n \xi_{n+1}} = R_n(\frac{1}{\xi_{n+1}})$.

Alors que $r_{n+1} = R_n(\frac{1}{a_{n+1}})$ et $r_{n+2} = R_n(\frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}})$.

R_n est une homographie, elle est localement monotone, donc comme x est comprise entre r_{n+1} et r_{n+2} ,

nécessairement $\frac{1}{\xi_{n+1}}$ est comprise entre $\frac{1}{a_{n+1}}$ et $\frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}}$.

Donc $\frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}} \leq \frac{1}{\xi_{n+1}} \leq \frac{1}{a_{n+1}}$ et donc $a_{n+1} \leq \xi_{n+1} \leq a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}$.

a_{n+1} est un nombre entier, $\frac{1}{a_{n+2}} \in]0, 1[$, donc nécessairement : $a_{n+1} = \lfloor \xi_{n+1} \rfloor = \alpha_{n+1}$.

Ainsi $\mathcal{Q}_{n+1}$ est démontré.

/3

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha_n$ Cela signifie que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il y a au plus un seul antécédent par F .

/0,5

Ainsi, F est injective. En outre, F étant surjective, F est bijective5. Soit $m \in \mathbb{N}$. Notons, pour simplifier $y = \xi_m$.On note B , la suite obtenue pour y , comme on a obtenu A pour x . On a donc $y = \tilde{B}$ (et $x = \tilde{A}$).Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on a vu en question 2.a. que $\xi_{m+s} = \Omega^s(\xi_m) = \Omega^s(y)$.

$$b_s = \lfloor \xi_s(y) \rfloor = \lfloor \Omega^s(y) \rfloor = \lfloor \xi_{m+s}(x) \rfloor = a_{m+s}$$

Donc B est la suite extraite de A , à partir du rang m .

/2

$$\xi_m = \tilde{B} \text{ avec } B = (a_m, a_{m+1}, \dots) = (a_n)_{n \geq m}$$

C. Une classe d'équivalence sur les fractions continues

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que x est congruent à y et on note $x \simeq y$,si il existe $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{ay+b}{cy+d}$ avec $ad-bc \in \{-1, 1\}$.1. • $\simeq$ est réflexive : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = \frac{1x+0}{0x+1}$ avec $1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$ donc $x \simeq x$.• $\simeq$ est symétrique : supposons que $x \simeq y$, donc $x = \frac{ay+b}{cy+d}$ avec $ad-bc \in \{-1, 1\}$,

$$\text{On a alors } cyx + dx = ay + b \text{ donc } (cx - a)y = b - dx, \text{ donc } y = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

$$\text{et } (-d) \times (-a) - (b \times c) = ad - bc \in \{-1, 1\}.$$

Ainsi on a $y \simeq x$.• $\simeq$ est transitive : supposons que $x \simeq y$ et $y \simeq z$.

$$\text{donc } x = \frac{ay+b}{cy+d} \text{ avec } ad-bc \in \{-1, 1\} \text{ et } y = \frac{a'z+b'}{c'z+d'} \text{ avec } a'd'-b'c' \in \{-1, 1\}.$$

$$\text{On a alors } x = \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} = \frac{Az + B}{Cz + D}.$$

$$\begin{aligned} \text{et } AD - BC &= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') = aa'dd' + bc'cb' - ab'dc' - bd'ca' \\ &= ad(a'd' - b'c') + bc(b'c' - a'd') = (ad - bc)(a'd' - b'c') = \pm 1 \end{aligned}$$

/2

 $\simeq$ est une relation d'équivalence.

2. Classe de 0

(a) Soit $r \simeq 0$. Donc il existe a, b, c et $d \in \mathbb{Z}$ tels que $r = \frac{a \times 0 + b}{c \times 0 + d} = \frac{b}{d} \in \mathbb{Q}$.

/1

$$r \simeq 0 \implies r \in \mathbb{Q}$$

(b) Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec p et q irréductibles.On admet qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $up + vq = 1$.

$$\text{On a alors } r = \frac{p}{q} = \frac{v \times 0 + p}{(-u) \times 0 + q} \text{ et } vq - (-u)p = vq + up = 1.$$

/1,5

 r est congruent 0.

(c) On a montrer par double inclusion que

/0,5

$$\bar{0} = \mathbb{Q}$$

3. Classe d'un irrationnel.

On admet le résultat suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Si } y = \frac{P\zeta + R}{Q\zeta + S} \text{ avec } Q > S > 0 \text{ et } PS - QR = \pm 1 \\ &\text{alors il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{R}{S} = r_{n-1}(y) \text{ et } \frac{P}{Q} = r_n(y) \end{aligned}$$

○ Remarques !

~~~~~  $P \wedge Q = 1$ . Si l'on cherche les couples  $(u, v)$  de BÉZOUT tel que  $uP - vQ = 1$ ,

~~~~~ On trouve qu'il n'y a qu'un unique couple  $(u, v)$  tel que  $u < Q$  et  $v < P$ .

~~~~~ Or ce couple en question est un couple associée à la réduite précédente (algorithme d'Euclide).

~~~~~ Et ici, il s'agit bien d'un tel couple recherché car on sait que  $S < Q$ , donc  $S = v = q_{n-1}$  et ensuite nécessairement  $R = p_{n-1}$ .

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe donc $A \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ tel que $x = \tilde{A}$

(a) On suppose le théorème acquis.

Comme $\frac{R}{S}$ est une fraction irréductible, on a $R = \epsilon p_{n-1}$ et $S = \epsilon q_{n-1}$ avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

Et de même $P = \epsilon' p_n$ et $Q = \epsilon' q_n$ avec $\epsilon' \in \{-1, 1\}$.

Enfin, comme $PS - QR = \pm 1 = p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}$, nécessairement $\epsilon = \epsilon'$.

Et donc $y = \frac{\epsilon(p_n \zeta + p_{n-1})}{\epsilon(q_n \zeta + q_{n-1})} \iff \zeta = \frac{q_{n-1}y - p_{n-1}}{-q_n y + p_n}$. Et de même : $y = \frac{p_n \xi_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \xi_{n+1} + q_{n-1}}$,

donc par injectivité de l'homographie

/2

$$\boxed{\text{Nécessairement } \zeta = \xi_{n+1}(y).}$$

(b) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $\xi_m = [a_m, a_{m+1}, \dots, a_r, \dots]$.

Avec cette définition de (ξ_m) , on a vu en B.3. que $x = \frac{p_n + \xi_n p_{n-1}}{q_n + \xi_n q_{n-1}}$

et par ailleurs en A.1.(d) : $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} \in \{-1, 1\}$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc } x \simeq \xi_m.}$$

(c) Supposons que $y \simeq x$ Pour fixer les choses, on note $y = \frac{Ax + B}{Cx + D}$ avec $AD - BC = \pm 1$.

/1

$$\boxed{\text{Par simple transitivité : } \forall m \in \mathbb{N}, y \simeq \xi_m.}$$

(d) On conserve les notations (p_n) et (q_n) définie à partir de x .

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x est compris entre r_n et r_{n+1} (d'après A.3.(b)),

donc $|x - r_n| \leq |r_{n+1} - r_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ (d'après A.3.(a))

Enfin, comme (q_n) est croissante, $q_{n+1} q_n > q_n^2$ et donc

/1,5

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \quad |x - r_m| < \frac{1}{q_m^2}}$$

(e) Cela signifie, en multipliant par $q_m > 0$: $|p_m - x q_m| < \frac{1}{q_m}$, soit $p_m - x q_m = \frac{\delta_m}{q_m}$ avec $|\delta_m| < 1$.

/1

$$\boxed{\text{Donc pour tout } m \in \mathbb{N}, \text{ il existe } \delta_m \in]-1, 1[\text{ tels que } p_{m-1} = x q_{m-1} + \frac{\delta_m}{q_{m-1}}.}$$

(f) Donc $C p_{m-1} + D q_{m-1} = (Cx + D) q_{m-1} + \frac{C \delta_m}{q_{m-1}}$ et $C p_{m-2} + D q_{m-2} = (Cx + D) q_{m-2} + \frac{C \delta_{m-1}}{q_{m-2}}$

Or $\frac{C \delta_m}{q_{m-1}} \rightarrow 0$ car $(q_{m-1}) \rightarrow \infty$.

Puis $(Cx + D) > 0$ et $q_{m-1} > q_{m-2}$, pour tout entier m .

/2

$$\boxed{\text{Donc il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } C p_{m-1} + D q_{m-1} > C p_{m-2} + D q_{m-2} > 0.}$$

(g) Lorsqu'on applique la transitivité à $y = \frac{Ax + B}{Cx + D}$ et $x = \frac{p_{m-1} \xi_m + p_{m-2}}{q_{m-1} \xi_m + q_{m-2}}$, il vient :

$$y = \frac{(A p_{m-1} + B q_{m-1}) \xi_m + (A p_{m-2} + B q_{m-2})}{(C p_{m-1} + D q_{m-1}) \xi_m + (C p_{m-2} + D q_{m-2})}$$

D'après la question précédente, il existe m tel que $C p_{m-1} + D q_{m-1} > C p_{m-2} + D q_{m-2} > 0$.

On peut alors appliquer le résultat admis,

/1,5

$$\boxed{\text{Donc il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } y = \frac{p_{n-1}(y) \xi_m + p_{n-2}(y)}{q_{n-1}(y) \xi_m + q_{n-2}(y)}}$$

- (h) On applique alors le résultat de la question (a) : $\xi_m(x) = \xi_n(y)$.
 Par unicité du développement en fraction continue de $\xi_m(x) = \xi_n(y)$,
 on trouve que pour tout $h \geq 0$, $a_{m+h}(x) = b_{n+h}(y)$.

/1,5

Si $x \simeq y$, et si $x = \tilde{A}$ et $y = \tilde{B}$, alors il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $(a_h)_{h \geq m} = (b_h)_{h \geq n}$.

4. Nombre quadratique.

On dit que x a un développement en fraction continue périodique s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $\xi_{m+k} = \xi_m$.

- (a) Supposons qu'il existe $(m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\xi_{m+k} = \xi_m$,
 Soit $s > m$, alors (avec les notations du début de la partie B).

$$\xi_{s+k} = \Omega^{s+k}(x) = \Omega^{s-m} \circ \Omega^{m+k}(x) = \Omega^{s-m}(\xi_{m+k}) = \Omega^{s-m}\Omega^m(x) = \xi_s$$

/2

Pour tout $s > m$, $\xi_{s+k} = \xi_s$.

- (b) On trouve par développement en fraction continue de ξ_m (avec la formule B3.(c)) :

$$\xi_m = \frac{p_{k-1}\xi_k(\xi_m) + p_{k-2}(\xi_m)}{q_{k-1}\xi_k(\xi_m) + q_{k-2}(\xi_m)} = \frac{A\xi_{k+m} + B}{C\xi_{m+k} + D} = \frac{A\xi_m + B}{C\xi_m + D}$$

où $A, B, C, D \in \mathbb{N}^*$, car il s'agit d'éléments de type p_k ou q_k .

/1

$$\xi_m = \frac{A\xi_m + B}{C\xi_m + D} \text{ avec } A, B, C, D \in \mathbb{N}^*$$

- (c) On a donc $C\xi_m^2 + (D - A)\xi_m - B = 0$.
 Donc ξ_m est un irrationnel quadratique ($C \neq 0$).

Par ailleurs, on sait que $x = \frac{a\xi_m + b}{c\xi_m + d}$, donc $\xi_m = \frac{dx - b}{-cx + a}$ et donc

$$C \left(\frac{dx - b}{-cx + a} \right)^2 + (D - A) \frac{dx - b}{-cx + a} - B = 0$$

En mettant au même dénominateur, on trouve que x est racine d'un polynôme à coefficients entiers, de degré 2 : $(Cd^2 - Bc^2 + (D - A)cd)x^2 + \dots = 0$.

/2

Si x admet un développement en fraction continue périodique, x est quadratique.

- (d) Réciproquement, supposons que x est un nombre quadratique.

On note $[a_0, a_1 \dots a_n, \dots]$, le développement en fraction continue de x . L'idée consiste à montrer que chaque ξ_n est un nombre irrationnel quadratique. Pour cela il faut leur associer une polynôme de degré 2 T_n à coefficients entiers et donc ξ_n est une racine.

Nous allons montrer que la suite (T_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc qu'il existe m, n tel que $\xi_n = \xi_m$, à partir de cet instant la développement sera périodique.

On définit par récurrence, des polynômes $T_n = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \alpha_{n-1}$:

— T_0 est un polynôme à coefficients entiers donc $x = \xi_0$ est une racine.

On peut écrire $T_0 = \alpha_0 X^2 + \beta_0 X + \alpha_{-1}$ (ce qui définit par la même occasion $\alpha_0, \beta_0, \alpha_{-1}$).

— Avec $\xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}$, on a donc

$$\begin{aligned} T_n(\xi_n) = 0 &\implies \alpha_n \left(a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}} \right)^2 + \beta_n \left(a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}} \right) + \alpha_{n-1} = 0 \\ &\implies T_n(a_n)\xi_{n+1}^2 + 2T'_n(a_n)\xi_{n+1} + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Et donc, avec, $\alpha_{n+1} = T_n(a_n)$ et $\beta_{n+1} = T'_n(a_n)$, on a $T_{n+1}(\xi_{n+1}) = 0$.

Ainsi, T_{n+1} est bien un polynôme à coefficients entiers (puisque T_n l'est).

Miracle, il y a un invariant simple associé à la suite T_n , la suite des discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \beta_{n+1}^2 - 4\alpha_n\alpha_{n+1} = (2\alpha_n a_n + \beta_n)^2 - 4\alpha_n(\alpha_n a_n^2 + \beta_n a_n + \alpha_{n-1}) \\ &= \beta_n^2 - 4\alpha_n\alpha_{n-1} = \Delta_n \end{aligned}$$

Nous savons par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$, donc $\xi_n > 1$ (il ne peut pas être un entier).

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{\xi_n}$, l'autre racine (avec ξ_n) de T_n .
Alors, on a

$$T_{n+1}(\overline{\xi_{n+1}}) = 0 = T_n(a_n)\overline{\xi_{n+1}}^2 + 2T'_n(a_n)\overline{\xi_{n+1}} + \alpha_n$$

Donc

$$\alpha_n \left(a_n + \frac{1}{\overline{\xi_{n+1}}} \right)^2 + \beta_n \left(a_n + \frac{1}{\overline{\xi_{n+1}}} \right) + \alpha_{n-1} = 0$$

Or on reconnaît $T_n(a_n + \frac{1}{\overline{\xi_{n+1}}})$, donc $\overline{\xi_n} = a_n + \frac{1}{\overline{\xi_{n+1}}}$.

Or si tous les $\overline{\xi_n}$ sont positif, on aurait donc $\lfloor \overline{\xi_n} \rfloor = a_n$ et donc $x = \xi_0$ et $\overline{x} = \overline{\xi_0}$ aurait le même développement en fractions continues.

Cela signifierait que $x = \overline{x}$, donc $\Delta = 0$ et x sera rationnel, ce qui est faux.

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\lfloor \overline{\xi_{n_0}} \rfloor \neq a_{n_0}$, pour cela il faut que $\overline{\xi_{n_0}} < 0$.

dans ce cas $\overline{\xi_{n_0+1}} = \frac{1}{\overline{\xi_{n_0}} - a_{n_0}} < 0$ et pour tout $n \geq n_0$, $\overline{\xi_n} < 0$

Toujours : $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \xi_n \times \overline{\xi_n} < 0$.

Donc $\beta_n^2 = \Delta + \alpha_n \alpha_{n-1}$, ne peut prendre qu'un nombre fini de grandeur entières.

Par conséquent, il existe m_1 et $m_2 > n_0$ tel que $\beta_{m_1} = \beta_{m_2}$, $\alpha_{m_1} = \alpha_{m_2}$ et $\xi_{m_1} = \xi_{m_2}$.

L'algorithme déterministe qui suit donne alors $a_{m_1} = a_{m_2}$, puis $a_{m_1+1} = a_{m_2+1}$ puis ...

La réciproque est démontrée :

/4

si x est irrationnel quadratique alors la fraction continue de x est périodique.