MPSI 3 - Fermat
2019-2020

Le 11.10.19

Devoir surveillé n°2
CORRECTION

Problème. Série de Fourier. Noyau de Fejer

A. Convolution

On définit le produit de convolution $*$ de deux fonctions f, g de $\mathcal{C}_{2\pi}$ par :

$$\forall\ f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}, \qquad f * g : x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

On considère deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ quelconques et fixés pour l'ensemble de ces questions.

1. Il n'y a aucun problème de définition, $\mathcal{D}_{f*g} = \mathbb{R}$.
   Puis, considérons $x \in \mathbb{R}$. Comme $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$:

$$(f*g)(x+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+2\pi-t)g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = f*g(x)$$

/1

$$\boxed{f * g \text{ est } 2\pi \text{ périodiques.}}$$

On admet que $f * g \in \mathcal{C}_{2\pi}$

2. Soient $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons d'abord que $u \mapsto f(x-u)g(u)$ est 2π périodique, puisque f et g le sont.
   On a alors vu en cours que dans ce cas :

$$\forall\ X \in \mathbb{R}, \qquad \int_X^{X+2\pi} f(u)g(x-u)\mathrm{d}u = \int_0^{0+2\pi} f(u)g(x-u)\mathrm{d}u$$

La valeur de l'intégrale sur une période ne dépend pas du point de départ du calcul.

Remarques !
On démontre cela par changement de variables. Soit F 2π-périodique et $X \in \mathbb{R}$.
Soit $n = \left\lfloor \frac{X}{2\pi} \right\rfloor$, i.e. $n \in \mathbb{Z}$ et $2n\pi \leqslant X < 2(n+1)\pi = 2n\pi + 2\pi$.
D'après la relation de Chasles *:*

$$\int_X^{X+2\pi} F(t)dt = \int_X^{2(n+1)\pi} \underbrace{F(t)dt}_{u=t-2n\pi} + \int_{2(n+1)\pi}^{X+2\pi} \underbrace{F(t)dt}_{u=t-2(n+1)\pi} = \int_{X-2n\pi}^{2\pi} F(t)dt + \int_0^{X-2n\pi} F(t)dt = \int_0^{2\pi} F(t)dt$$

Puis on fait le changement de variable linéaire $u = x - t$.
$t \mapsto x - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, le changement de variable est licite. Notons que $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$: /2

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi} f(u)g(x-u)(-\mathrm{d}u)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi} f(u)g(x-u)(-\mathrm{d}u) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} f(u)g(x-u)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{x} g(x-u)f(u)\mathrm{d}u = (g*f)(x)\end{aligned}$$

d'après la remarque précédente.

$$\boxed{\text{Donc pour toute fonctions } f, g \in \mathcal{C}_{2\pi},\ f * g = g * f.\ * \text{ est commutative}}$$

3. Il s'agit simplement d'appliquer la linéarité de l'intégrale :
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\big(f*(g_1+g_2)\big)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)(g_1(t)+g_2(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g_1(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g_2(t))\mathrm{d}t\\ &= (f*g_1)(x) + (f*g_2)(x)\end{aligned}$$

/0,5

$$\boxed{\text{Donc pour } f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}_{2\pi},\ f*(g_1+g_2) = f*g_1 + f*g_2.\ * \text{ est distributive par rapport à l'addition.}}$$

On admettra pour la suite que :

$$\forall\ m \in \mathbb{N},\ \forall\ \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m \in \mathbb{C},\ \forall\ g_1, g_2, \dots g_m \in \mathcal{C}_{2\pi}, \qquad f * \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j\right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j (f * g_j).$$

Cela se démontre par récurrence sans difficulté.

4. Soient $k, \ell \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_k(e_\ell) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}e^{i\ell t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)t}\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{\ell-k}e^{i(\ell-k)t}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\ell-k}(1-1) = 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}(2\pi - 0) = 1 & \text{si } k = \ell \end{cases} \end{aligned}$$

/1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } c_k(e_\ell) = \delta_{k,\ell}.}$$

5. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f * e_k)(x) = (e_k * f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik(x-t)}f(t)\mathrm{d}t = \frac{e^{ikx}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}f(t)\mathrm{d}t = e^{ikx}c_k(f)$$

/1

$$\boxed{\forall\ k \in \mathbb{Z},\ f * e_k = c_k(f)e_k}$$

Remarques !

On notera bien qu'on a ici l'égalité de deux fonctions (définies chacune sans argument x).

Et donc en particulier pour $f = e_\ell$ (avec le résultat de la question précédente) :

$$\boxed{e_k * e_\ell = e_\ell * e_k = c_k(e_\ell)e_k = \delta_{k,\ell}e_k}$$

6. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{C}$, $g_1, \dots g_m \in \mathcal{C}_{2\pi}$,

$$c_k\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(t)e^{-itk}\right)\mathrm{d}t = \sum_{j=1} \lambda_j^n \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_j(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t\right)$$

par linéarité de l'intégrale (la somme est ici finie). /1

$$\boxed{c_k\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j\right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j c_k(g_j)}$$

Puis en multipliant par e_k

$$\boxed{\forall\ m \in \mathbb{N},\ \forall\ \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{C},\ \forall\ g_1, \dots g_m \in \mathcal{C}_{2\pi}\ :\ c_k\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j\right)e_k = \sum_{j=1}^m \lambda_j c_k(g_j)e_k}$$

Remarques !

Autre méthode pour cette dernière somme.
On a alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\forall\ \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{C}$, $\forall\ g_1, \dots g_m \in \mathcal{C}_{2\pi}$,

$$c_k\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j\right)e_k = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j\right) * e_k = e_k * \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j\right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j (e_k * g_j)$$

d'après le résultat admis après la question 3. Donc comme $e_k * g_j = g_j * e_k = c_k(g_j)e_k$:

$$c_k\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j\right)e_k = \sum_{j=1}^m \lambda_j c_k(g_j)e_k$$

$$\forall\ m \in \mathbb{N},\ \forall\ \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{C},\ \forall\ g_1, \dots g_m \in \mathcal{C}_{2\pi}\ :\ c_k\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j\right)e_k = \sum_{j=1}^m \lambda_j c_k(g_j)e_k$$

7. Soit $P \in \mathcal{P}_n$.

   Donc il existe $a_{-n}, a_{-n+1}, \dots a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}$, tels que $P = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} a_k e_k$.

   Par linéarité admise plus haut :

$$f * P = f * \left(\sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \right) = \sum_{k=-n}^{n} a_k (f * e_k) = \sum_{k=-n}^{n} a_k c_k(f) e_k$$

   Donc $f * P \in \mathcal{P}_n$ /1

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathcal{P}_n,\ f * P_n \in \mathcal{P}_n.}$$

   Par définition, $D_n \in \mathcal{P}_n$, comme P précédemment mais avec $a_i(D_n) = 1$, pour tout $i \in [\![-n, n]\!]$. /0,5

$$\boxed{\text{Donc } f * D_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k}$$

8. Soit $P \in \mathcal{P}_n$.

   Donc il existe $a_{-n}, a_{-n+1}, \dots a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}$, tels que $P = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} a_k e_k$.

   Alors, par linéarité (vue plus haut)

$$\forall\, k \in [\![-n, n]\!], \qquad c_k(P) = \sum_{j=-n}^{n} a_j c_k(e_j) = \sum_{j=-n}^{n} a_j \delta_{k,j} = a_k$$

   Donc puisqu'$a_k = c_k(P)$, /1,5

$$\boxed{\forall\, P \in \mathcal{P}_n, \qquad P = \sum_{k=-n}^{n} c_k(P) e_k}$$

B. Continuité et théorème de Weierstrass

1. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$.
   $f_{|[0,2\pi]}$ (fonction restreinte) est continue sur $[0, 2\pi]$, on applique le théorème de WEIERSTRASS :
   il existe $x_0 \in [0, 2\pi]$ tel que, pour $t \in [0, 2\pi]$, $|f(t)| = \left|f_{|[0,2\pi]}(t)\right| \leqslant \left|f_{|[0,2\pi]}(x_0)\right| = |f(x_0)|$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, puis $n_x = \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ alors, $n_x \leqslant \dfrac{x}{2\pi} < n_x + 1$.
   On a alors $2n_x\pi \leqslant x < 2(n_x + 1)\pi$ et donc $0 \leqslant x - 2n_x\pi < 2\pi$.
   Puis par 2π périodicité de f : $f(x) = f(x - 2n_x\pi)$. Ainsi comme $x - 2n_x\pi \in [0, 2\pi[$:

$$f|(x)| = |f(x - 2n_x\pi)| \leqslant |f(x_0)|$$

   Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ /2,5

$$\boxed{\text{Il existe } x_0 \in [0, 2\pi] \text{ tel que : } \forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant f(x_0).}$$

2. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|g(t)| \leqslant \|g\|_\infty$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(x - t)| \leqslant \|f\|_\infty$.
   On a donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad |(f * g)(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{|2\pi|} \int_0^{2\pi} |f(x-t)| \times |g(t)| \mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f\|_\infty \|g\|_\infty \mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty \|g\|_\infty 2\pi}{2\pi}$$

   /2,5

$$\boxed{\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty}$$

C. Noyau de Fejer

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$,
   D'après la question A.6. (appliqué à deux reprises) : /

$$\begin{aligned} c_k(K_n) &= c_k\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} c_k(D_j) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(c_k\left(\sum_{r=-j}^{j} e_r\right)\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{r=-j}^{j} c_k(e_r)\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{r=-j}^{j}\delta_{k,r} \end{aligned}$$ 1,5

   Or $\displaystyle\sum_{r=-j}^{j}\delta_{k,r} = \big[k \in [\![-j,j]\!]\big] = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in [\![-j,j]\!] \iff |k| \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   Donc si $|k| > n$, alors $c_k(K_n) = 0$
   et si $|k| \leqslant n$: $c_k(K_n) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=|k|}^{n} 1 = \dfrac{n-|k|+1}{n+1} = 1 - \dfrac{|k|}{n+1}$, /1,5

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(K_n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|k|}{n+1} & \text{si } |k| \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. Pour tout $j \leqslant n$, la fonction $D_j \in \mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_n$.
   Donc par stabilité algébrique (vectorielle), $K_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{j=0}^{n} D_j \in \mathcal{P}_n$.
   On peut donc appliquer le résultat de la dernière question de la partie A /1

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ K_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(K_n)e_k = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)e_k}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $t \in \mathbb{R}$, en posant $h = k+n$

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int}\sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)t} = e^{-int}\sum_{h=0}^{2n} e^{iht} = e^{-int}\sum_{h=0}^{2n}\left(e^{it}\right)^h$$

   • Si $e^{it} = 1$ i.e. $t \equiv 0[2\pi]$, alors on trouve $D_n(t) = (2n+1)\left(e^{-it}\right)^n = (2n+1)$.
   • Si $e^{it} \neq 1$, on a la somme de $2n+1$ termes d'une suite géométrique :

$$D_n(t) = e^{-int}\frac{1-(e^{it})^{2n+1}}{1-e^{it}} = \frac{(e^{-int} - e^{i(n+1)t})}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} = \frac{e^{it/2}(e^{-i(n+\frac{1}{2}t)} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} = \frac{-2i\sin((n+\frac{1}{2})t)}{-2i\sin(\frac{t}{2})}$$ /2

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ D_n = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}}$$

Remarques !
Plus rapidement, on peut dire qu'il s'agit d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e^{it} et de premier terme e^{-int}. Cela marche très bien !

4. On exploite la formule précédente. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.
   • Si $t \equiv 0[2\pi]$, alors pour tout $k \leqslant n$, $D_k(t) = 2k+1$ et donc /1

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}[(k+1)^2 - k^2] = \frac{1}{n+1}[(n+2)^2 - 0] = (n+1)$$

Remarques !
Autre méthode :

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}1 = \frac{2}{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2} + 1 = n+1$$

- Si $t \not\equiv 0[2\pi]$, alors /2

$$\begin{aligned}
K_n(t) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin((2k+1)\frac{t}{2})}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{(n+1)\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Im}\left(e^{i(2k+1)t/2}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{it/2}}{(n+1)\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}(e^{it})^k\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{it/2}}{(n+1)\sin\frac{t}{2}}\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{it/2}}{(n+1)\sin\frac{t}{2}}\frac{e^{i(n+1)t/2}(-2i)\sin\frac{(n+1)t}{2}}{e^{it/2}(-2i)\sin\frac{t}{2}}\right) = \frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}\mathrm{Im}\left(e^{i(n+1)t/2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi pour tout } n\in\mathbb{N},\ K_n = \begin{cases}\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 & \text{si } t\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}\\ n+1 & \text{si } t\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}.}$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}$, par linéarité (et en exploitant la formule trouvée en question 2) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}c_k(K_n)\int_0^{2\pi}e^{ikt}\mathrm{d}t$$

Or, on a déjà fait le calcul (question A.4.) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{irt} = \delta_{r,0}$$

Donc /1,5

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(t)\mathrm{d}t = c_0(K_n) = 1-\frac{|0|}{n+1} = 1}$$

6. Soit $\alpha\in]0,\pi[$, alors pour tout $t\in[\alpha,2\pi-\alpha]$, $t\not\equiv 0[2\pi]$,

donc $K_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$.

La fonction $[\alpha,2\pi-\alpha]\to\mathbb{R}$, $t\mapsto\dfrac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}$ est continue.

Donc il existe $x_0\in[\alpha,2\pi-\alpha]$ tel que $\forall\ t\in[\alpha,2\pi-\alpha]$, $\left|\dfrac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\right|\leqslant\left|\dfrac{1}{\sin^2\frac{x_0}{2}}\right|$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, (par positivité de K_n et comme $\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\leqslant 1$) : /1

$$0\leqslant\int_\alpha^{2\pi-\alpha}K_n(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^{2\pi-\alpha}|K_n(t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{x_0}{2}}\int_0^{2\pi}1\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\frac{2\pi}{\sin^2\frac{x_0}{2}}$$

Donc par théorème d'encadrement : /1,5

$$\boxed{\text{pour tout } \alpha\in]0,\pi],\ \lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^{2\pi-\alpha}K_n(t) = 0}$$

7. On a vu que pour tout $t\notin 2\pi\mathbb{Z}$:

$$K_n(t) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e_k(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

En particulier pour $d = n+1\Leftrightarrow n = d-1$:

$$K_{d-1}(t) = \sum_{k=-d+1}^{d-1}\left(1-\frac{|k|}{d}\right)e_k(t) = \frac{1}{d}\left(\frac{\sin\left(d\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

Puis en $t_k = \frac{2k\pi}{n}$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ (donc $t_k \not\equiv [2\pi]$) : /1

$$\frac{1}{d}\left(\frac{\left(\sin \frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin \frac{k\pi}{n}}\right)^2 = \sum_{j=-d+1}^{d-1}\left(1-\frac{|j|}{d}\right)e^{2ijk\pi/n}$$

On a alors en sommant pour k de 1 à $n-1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} &= d\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=-d+1}^{d-1}(d-|j|)\,e^{2ijk\pi/n} = \sum_{j=-d+1}^{d-1}\sum_{k=1}^{n-1}(d-|j|)\,e^{2ijk\pi/n} \\ &= \sum_{j=-d+1}^{d-1}(d-|j|)\sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{2ij\pi/n}\right)^k\end{aligned}$$ /1

Or si $e^{2ij\pi/n} \neq 0$, (n'oublions pas le premier terme!)

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{2ij\pi/n}\right)^k = e^{2ij\pi/n}\frac{1-\left(e^{2ij\pi/n}\right)^{n-1}}{1-e^{2ij\pi/n}} = \frac{e^{2ij\pi/n}-e^{2ij\pi}}{1-e^{2ij\pi/n}} = -1$$

Et si $e^{2ij\pi/n} \equiv 0[2\pi] \Longleftrightarrow j/n \equiv 0[1] \Longleftrightarrow n|j$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{2ij\pi/n}\right)^k = n-1$.

Or ici $j \leqslant [\![-d+1, d-1]\!]$ et $d \leqslant n$, donc la seule possibilité d'avoir $n|j$ est que $j=0$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} &= (-1)\sum_{j=-d+1}^{-1}(d-|j|) + (n-1)\underbrace{d-0}_{j=0} + (-1)\sum_{j=1}^{d-1}(d-|j|) \\ &= (-1)\underbrace{\sum_{r=1}^{d-1} r}_{r=n-|j|=n+j} + (n-1)d + (-1)\underbrace{\sum_{r=1}^{d-1}(r)}_{r=n-|j|=n-j} \\ &= -\frac{d(d-1)}{2} + (n-1)d - \frac{d(d-1)}{2} = d(n-1)-d(d-1) = d(n-d)\end{aligned}$$ /2

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = d(n-d) \text{ pour tout } d \in [\![1, n]\!].}$$

D. Approximation de $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ par la méthode de Fejer

Soient f et g des fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   On exploite le fait que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)\mathrm{d}t = 1$ et la relation de Chasles :

$$f(x) - (f * K_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t$$ /1,5

$$\boxed{f(x) - (f * K_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(f(x)-f(x-t)\big)K_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-f(x-t)\big)K_n(t)\mathrm{d}t}$$

   En exploitant la même propriété qu'en A.2., puisqu'on est en présence de fonction 2π-périodique.

2. On fixe $\epsilon > 0$.
   L'application f est continue sur $[-\pi, 3\pi]$ donc d'après le théorème d'Heine :
   il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_1, x_2 \in [-\pi, 3\pi]$: $|x_1 - x_2| \leqslant \alpha' \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \epsilon$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [-\pi, \pi]$.
   On note $x_1 = x - 2n_x\pi$ avec $n_x = \lfloor \frac{x}{2\pi} \rfloor$ de sorte que $n_x \in \mathbb{Z}$ et $x_1 \in [0, 2\pi]$.
   On note $x_2 = x - 2n_x\pi - t = x_1 - t$ de sorte que $x_2 \in [-\pi, 3\pi]$.
   Ainsi, x_1 et $x_2 \in [-\pi, 3\pi]$ et donc $|x_1 - x_2| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \epsilon$.
   Or $x_1 - x_2 = t$ et $f(x_1) - f(x_2) = f(x - 2n_x\pi) - f(x - 2n_x\pi - t) = f(x) - f(x-t)$
   par 2π-périodicité de f.
   On a donc en remplaçant par leur valeur : /2,5

$$\boxed{\text{il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, t \in [-\pi, \pi] \ : \ |t| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x-t)| \leqslant \epsilon.}$$

3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On applique la relation de CHASLES :

$$f(x) - (f * K_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\alpha} \big(f(x) - f(x-t)\big)K_n(t)\mathrm{d}t + \int_{-\alpha}^{\alpha} \big(f(x) - f(x-t)\big)K_n(t)\mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + \int_{\alpha}^{\pi} \big(f(x) - f(x-t)\big)K_n(t)\mathrm{d}t\right)$$
$$|f(x) - (f * K_n)(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\alpha} \big|f(x) - f(x-t)\big|K_n(t)\mathrm{d}t + \int_{-\alpha}^{\alpha} \big|f(x) - f(x-t)\big|K_n(t)\mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + \int_{\alpha}^{\pi} \big|f(x) - f(x-t)\big|K_n(t)\mathrm{d}t\right)$$

car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $K_n(t) \geqslant 0$.
Puis, d'après l'inégalité triangulaire et le théorème de WEIERSTRASS

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad |f(x) - f(x-t)| \leqslant |f(x)| + |f(x-t)| \leqslant 2\|f\|_\infty$$

On trouve alors :

$$|f(x) - (f * K_n)(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(4\|f\|_\infty \int_{\alpha}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t + \int_{-\alpha}^{\alpha} \big|f(x) - f(x-t)\big|K_n(t)\mathrm{d}t\right)$$

en exploitant la parité de K_n et donc : $\displaystyle\int_{-\pi}^{-\alpha} K_n(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t$. *$/2$*

Ensuite, pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$, $|x - (x-t)| = |t| \leqslant \alpha$, donc $|f(x) - f(x-t)| \leqslant \epsilon$.
On trouve donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x) - (f * K_n)(x)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(4\|f\|_\infty \int_{\alpha}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t + \epsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} K_n(t)\mathrm{d}t\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(4\|f\|_\infty \int_{\alpha}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t + \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t\right) \\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\|f\|_\infty \int_{\alpha}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t + \epsilon \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, cela est vrai en x_0 tel que $\|f - f * K_n\|_\infty = |(f - f * K_n)(x_0)|$: *$/1{,}5$*

$$\boxed{\|f - f * K_n\|_\infty \leqslant \epsilon + \frac{2}{\pi}\|f\|_\infty \int_{\alpha}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t}$$

4. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$.
Soit $\epsilon > 0$.
f est continue donc uniformément continue. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| \leqslant \alpha \Longleftrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon$.
On a alors $\omega_f(\alpha) < \epsilon$.
On a ensuite : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f - f * K_n\|_\infty \leqslant \epsilon + \dfrac{2}{\pi}\|f\|_\infty \displaystyle\int_{\alpha}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t$.
Or (par produit) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\|f\|_\infty \int_{a}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t$ (pour tout a, donc pour $a = \alpha$ en particulier).
Ainsi, il existe $N_{\alpha,\epsilon}$ tel que pour tout $n \geqslant N_{\alpha,\epsilon}$, $0 \leqslant \dfrac{2}{\pi}\|f\|_\infty \displaystyle\int_{\alpha}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \epsilon$. *1,5*

$$\boxed{\text{Donc pour tout } \epsilon, \text{ il existe } N (= N_{\alpha_\epsilon,\epsilon}) \text{ tel que pour tout } n \geqslant N,\ \|f - f * K_n\|_\infty \leqslant 2\epsilon.}$$

Cela signifie exactement que pour toute valeur qu'on imagine (même infiniment petite) ϵ, à partir d'un certain moment N, $\|f - f * K_n\|_\infty$ est plus petit que cette valeur. *$/1$*

$$\boxed{\text{Cela veut exactement dire } \lim_{n\to\infty} \|f - f * K_n\| = 0}$$

Remarques !

Dans ce problème, on a démontré le résultat de la convergence uniforme de la somme de CESARO *de la série de* FOURIER *de f vers f.*
A toute fonction f périodique, on associe une série trigonométrique (polynôme trigonométrique infini) de la forme

$$t \mapsto S(f) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikt} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}\right) \qquad \text{où } \forall\, k \in \mathbb{Z}, c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$$

On aimerait pouvoir affirmer que $f = S(f)$.
Nous en sommes pas loin sous bonnes conditions pour f (f continue) à tel point qu'en physique, c'est toujours

≪ vrai ≫...
En réalité, il faut des conditions plus fortes (il suffit que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) pour pouvoir affirmer que la série $S(f)$ converge uniformément vers f. Dans cette situation, naturelle, on a fait comme calcul $S(f) = \lim(f * D_n)$

Si on fait le calcul différemment, avec la fonction K_n, toujours positif, on associe à f :

$$t \mapsto T(f) := \lim n \to \infty(F * K_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n}\left(\sum_{k=-r}^{r} c_k(f)e^{ikt}\right)\right) \qquad \text{où } \forall\ k \in \mathbb{Z}, c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

alors, on a démontré ici que $T(f)$ converge uniformément vers f, si celle-ci est continue.