

## Devoir à la maison n°3 CORRECTION

### Exercice

On considère :  $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (x + y, xy)$

1. Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $(X - x)(X - y) = X^2 - (x + y)X + xy$ , donc le polynôme  $X^2 - (x + y)X + xy$  admet deux racines réelles.

Ainsi son discriminant est positif :  $\Delta = (x + y)^2 - 4xy \geq 0$ .

Donc  $H(x, y) = (x + y, xy) \in \{(a, b) \mid b^2 - 4a \geq 0\}$ .

Réciproquement, pour tout  $(s, p) \in S := \{(a, b) \mid b^2 - 4a \geq 0\}$ .

le polynôme  $X^2 - sX + p$  admet deux racines réelles car son discriminant est positif.

Si on note  $x, y$  ces deux racines (si  $\Delta = 0$ ,  $y = x$  est une racine double), alors  $H(x, y) = (s, p)$ .

Par double inclusion,  $H(\mathbb{R}^2) = \{(a, b) \mid b^2 - 4a \geq 0\}$ , noté  $S$ .

Comme  $H(\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{R}^2$ ,

la fonction  $H$  n'est pas surjective (de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ )

2.  $H(1, 2) = (3, 2) = H(2, 1)$  (évidemment :  $(1, 2) \neq (2, 1)$ ).

Donc  $H$  n'est pas injective.

On note  $\mathcal{R}$ , la relation binaire définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff H(x, y) = H(x', y')$

3. On va montrer chacune des trois caractéristiques :

— Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $H(x, y) = H(x, y)$ , donc  $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ .

Donc  $\mathcal{R}$  est réflexive.

— Soient  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ , tels que  $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$  i.e.  $H(x, y) = H(x', y')$  donc évidemment,  $H(x', y') = H(x, y)$  et  $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$ .

Donc  $\mathcal{R}$  est symétrique.

— Soient  $(x, y), (x', y')$  et  $(x'', y'') \in \mathbb{R}^2$  tels que  $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$  et  $(x', y')\mathcal{R}(x'', y'')$ .

Donc  $H(x, y) = H(x', y') = H(x'', y'')$  ainsi  $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$  et  $\mathcal{R}$  est transitive.

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

4. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Alors

$$\begin{aligned} (a, b) \in \mathcal{O}(x, y) &\iff H(x, y) = H(a, b) \iff \begin{cases} x + y &= a + b \\ xy &= ab \end{cases} \\ &\iff (x, y) \text{ et } (a, b) \text{ est, chacun, un couple de solutions de } X^2 - (x + y)X + xy = 0 \\ &\iff (a, b) = (x, y) \text{ ou } (a, b) = (y, x) \end{aligned}$$

Si  $x \neq y$ ,  $\mathcal{O}((x, y)) = \{(x, y), (y, x)\}$  de cardinal 2 et si  $x = y$ ,  $\mathcal{O}((x, y)) = \{(x, x)\}$  de cardinal 1

5. Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

— ou bien  $x = y$  et alors  $(x, y) \in \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 \mid c = d\}$

— ou bien  $x \neq y$ , dans ce cas, un et seul couple  $(x, y)$  ou  $(y, x)$  appartient à  $\{(c, d) \in \mathbb{R}^2 \mid c > d\}$

Donc

$$\frac{\mathbb{R}^2}{\mathcal{R}} \simeq \{(c, d) \mid c \geq d\}$$

6. Ces ensembles ont été créés pour :

—  $S = \text{Im } H$ , comme but. Donc  $\overline{H}$  est surjective

—  $\{(c, d) \in \mathbb{R}^2 \mid c > d\} \simeq \frac{\mathbb{R}^2}{\mathcal{R}}$  comme ensemble de départ.

Si  $\overline{H}(x, y) = \overline{H}(x', y')$ , alors  $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$  donc  $(x', y') \in \mathcal{O}((x, y))$ .

Mais alors  $(x', y') = (x, y)$  car on se trouve sur  $\{(c, d) \in \mathbb{R}^2 \mid c > d\} \left( \simeq \frac{\mathbb{R}^2}{\mathcal{R}} \right)$

$\overline{H} : \{(x, y) \mid x \geq y\} \longrightarrow S, \quad (x, y) \longmapsto (x + y, xy)$  est bijective.

## Problème

### Partie A - Etude des solutions d'un oscillateur paramétré par le second membre

1.  $\mu$  et  $\cos$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  donc, par produit :  $t \mapsto \mu(t) \cos(t)$  est également continue sur  $\mathbb{R}$ .

Elle admet donc une primitive  $G$  (qui s'annule en 0), de classe  $\mathcal{C}^1$ .

De même  $H$  est la primitive qui s'annule en 0 de  $t \mapsto \mu(t) \sin(t)$ , continue sur  $\mathbb{R}$ .

Puis par multiplication par  $\cos$  et  $\sin$ , dérivables :

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) &= \cos(x)G(x) + \sin(x)G'(x) + \sin(x)H(x) - \cos(x)H'(x) \\ &= \cos(x)G(x) + \sin(x)\mu(x)\cos(x) + \sin(x)H(x) - \cos(x)\mu(x)\sin(x) \\ &= \cos(x)G(x) + \sin(x)H(x) \end{aligned}$$

En 0, comme  $G(0) = H(0) = 0$  :

$$\boxed{F(0) = 0 \text{ et } F'(0) = 0.}$$

2. D'après la formule trouvée à la question précédente,  $F'$  est (au moins) de classe  $\mathcal{C}^1$  (comme  $G$ ,  $H$ ,  $\sin$  et  $\cos$ )

$$\boxed{\text{Donc } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F''(x) &= -\sin(x)G(x) + \cos(x)G'(x) + \cos(x)H(x) + \sin(x)H'(x) \\ &= -\sin(x)G(x) + \cos(x)\mu(x)\cos(x) + \cos(x)H(x) + \sin(x)\mu(x)\sin(x) \\ &= -F(x) + \mu(x)(\cos^2(x) + \sin^2(x)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R}, F''(x) + F(x) = \mu(x).}$$

3.  $F$  est  $\varphi$  sont toute deux solutions du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y &= \mu \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Or, tout problème de Cauchy admet une unique solution : nécessairement } F = \varphi.}$$

#### 4. Etude du caractère $2\pi$ -périodique de $\varphi$ .

- (a) Par composition (et addition)  $\mathfrak{G} : x \mapsto G(x + 2\pi) - G(x)$  et  $\mathfrak{H} : x \mapsto H(x + 2\pi) - H(x)$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $((x \mapsto x + 2\pi)' = (x \mapsto 1))$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}'(x) &= G'(x + 2\pi) - G'(x) = \mu(x + 2\pi)\cos(x + 2\pi) - \mu(x)\cos(x) \\ &= [\mu(x + 2\pi) - \mu(x)]\cos(x) = 0 \end{aligned}$$

par  $2\pi$ -périodicité de  $\cos$  puis de  $\mu$ . Et de même :

$$\mathfrak{H}'(x) = [\mu(x + 2\pi) - \mu(x)]\sin(x) = 0$$

- (b) Ainsi les applications  $x \mapsto G(x + 2\pi) - G(x)$  et  $x \mapsto H(x + 2\pi) - H(x)$  sont constantes.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, G(x + 2\pi) - G(x) = G(0 + 2\pi) - G(0) = G(2\pi) \text{ et } H(x + 2\pi) - H(x) = H(2\pi)}$$

- (c) On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(x + 2\pi) - \varphi(x) &= F(x + 2\pi) - F(x) \\ &= \sin(x + 2\pi)G(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi)H(x + 2\pi) - \sin(x)G(x) - \cos(x)H(x) \\ &= \sin(x)[G(x + 2\pi) - G(x)] + \cos(x)[H(x + 2\pi) - H(x)] = \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x + 2\pi) - \varphi(x) = \sin(x)G(2\pi) + \cos(x)H(2\pi)}$$

- (d) Clairement, il suffit que  $G(2\pi) = H(2\pi) = 0$  pour que  $\varphi(x + 2\pi) - \varphi(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .  
 Donc la condition  $G(2\pi) = H(2\pi) = 0$  est une condition suffisante à  $\varphi$  est  $2\pi$ -périodique.  
 Mais réciproquement, si pour tout  $x \in \mathbb{R}, \varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$ ,  
 alors pour tout  $x \in \mathbb{R}, \sin(x)G(2\pi) + \cos(x)H(2\pi)$ .  
 En particulier pour  $x = 0$ , on trouve  $0 + 1 \times H(2\pi) = 0$ , donc  $H(2\pi) = 0$ .  
 Et également pour  $x = \frac{\pi}{2}$ , on trouve  $1 \times G(2\pi) + 0 = 0$ , donc  $G(2\pi) = 0$ .  
 Donc  $G(2\pi) = H(2\pi) = 0$  est une condition nécessaire.

$$\varphi \text{ est } 2\pi\text{-périodique si et seulement } G(2\pi) = H(2\pi) = 0$$

- (e) Si  $\mu = \sin$ , alors :

$$G(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt = \left[ \frac{1}{2} \sin^2(t) \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$H(2\pi) = \int_0^{2\pi} \cos(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(2t) + 1] dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin(2t) + t \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\text{Donc } \varphi \text{ n'est pas } 2\pi\text{-périodique lorsque } \mu(t) = \sin t$$

- Si  $\mu = \cos$ , alors :

$$G(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \pi$$

$$\text{Donc } \varphi \text{ n'est pas } 2\pi\text{-périodique lorsque } \mu(t) = \cos t$$

- (f) Dans le cas où  $\mu = \sin$ ,  $H(2\pi) = \pi$ .

Donc, en  $x = 2k\pi$ ,

$$\varphi(x + 2\pi) - \varphi(x) = \varphi(2(k+1)\pi) - \varphi(2k\pi) = 0 + 1H(2\pi) = \pi$$

$((u_k))_k = (\varphi(2k\pi))_k$  est une suite arithmétique de raison  $\pi$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(2k\pi) = \varphi(0) + k\pi, \varphi \text{ n'est pas bornée lorsque } \mu(t) = \sin t$$

De même, on démontre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = \varphi(\frac{\pi}{2}) + k\pi, \varphi \text{ n'est pas bornée lorsque } \mu(t) = \cos t$$

- (g) On reprend les calculs de la question (e) :

$$\begin{aligned} G(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \sin(t) |\sin(t)| dt = \int_0^{\pi} \sin^2(t) dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t - \cos(2t) dt - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} t - \cos(2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \left[ t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi} - \left[ t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = \frac{1}{2} (\pi - 0 - \pi + 0) = 0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} H(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \cos(t) |\sin(t)| dt = \int_0^{\pi} \cos(t) \sin(t) dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(t) \sin(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \left[ \sin^2(t) \right]_0^{\pi} - \left[ \sin^2(t) \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, d'après la question (d), comme } G(2\pi) = H(2\pi) = 0, \varphi \text{ est } 2\pi\text{-périodique lorsque } \mu(t) = |\sin t|.$$

- (h) Lorsque  $\mu = |\sin|$ ,  
 la fonction  $\varphi$  est continue donc bornée sur une période (intervalle fermé :  $[0, 2\pi]$ ) et  $2\pi$ -périodique, donc bornée sur  $\mathbb{R}$  entier.  
 Les fonctions dérivées héritent également de la périodicité (et de la continuité, ici) :

$$f'(x + 2\pi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 2\pi + h) - f(x + 2\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\text{Les fonctions } \varphi, \varphi' \text{ et } \varphi'' \text{ sont bornées lorsque } \mu(t) = |\sin t|$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que  $\mu(t) = |\sin t|$ .

**Partie B - Calcul de**  $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \varphi(t) dt$

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} |\sin t| dt$ .

$$(a) \quad v_0 = \int_0^\pi e^{-t} |\sin(t)| dt = \operatorname{Im} \left( \int_0^\pi e^{(-1+i)t} dt \right) = \operatorname{Im} \left( \left[ \frac{1}{-1+i} e^{(-1+i)t} \right]_0^\pi \right).$$

$$v_0 = \operatorname{Im} \left( \frac{-1-i}{2} (-e^{-\pi} - 1) \right) = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$$

(b) Il s'agit de faire un changement de variable.  $t \mapsto t - n\pi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , bijectif.  
On pose donc  $u = t - n\pi$  ( $|\sin|$  est  $\pi$ -périodique) :

$$v_n = \int_0^\pi e^{-(u+n\pi)} |\sin(u+n\pi)| du = e^{-n\pi} \int_0^\pi e^{-u} |\sin(u)| du = e^{-n\pi} v_0 \quad - \quad \rho = e^{-\pi}$$

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on fait le calcul explicite de  $V_n = \sum_{k=0}^n v_k : \sum_{k=0}^n v_k = v_0 \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$ .

Comme  $\rho = e^{-\pi} \in ]-1, 1[$ , la suite  $(\rho^{n+1})_n$  converge vers 0 et donc

$$\text{la série } \sum_{k \geq 0} v_k \text{ converge vers } \sum_{k=0}^{+\infty} v_k := v_0 \frac{1}{1-\rho} = \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})} = \frac{1}{2} \frac{e^{-\pi/2}(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2})}{e^{-\pi/2}(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2})} = \frac{1}{2} \coth \frac{\pi}{2}$$

(d) Soit  $X > 0$ . Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n\pi \leq X < (n+1)\pi$  (en fait  $n = \lfloor \frac{X}{\pi} \rfloor$ ).

$$\text{On note, pour tout } n \geq 1, V_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} |\sin t| dt = \int_0^{n\pi} e^{-t} |\sin t| dt.$$

D'après la relation de CHASLES, la positivité de  $|\sin t|$  et la décroissance de  $t \mapsto e^{-t}$  :

$$\int_0^X e^{-t} |\sin(t)| dt - V_n = \int_{n\pi}^X e^{-t} |\sin t| dt \geq \int_{n\pi}^X e^{-n\pi} dt = e^{-n\pi} (X - n\pi) > \pi e^{-n\pi}$$

$$V_{n+1} - \int_0^X e^{-t} |\sin t| dt = \int_X^{(n+1)\pi} e^{-t} |\sin t| dt \geq \int_X^{(n+1)\pi} e^{-n\pi} dt = e^{-n\pi} ((n+1)\pi - X) > \pi e^{-n\pi}$$

Donc

$$V_n + \pi e^{-n\pi} < \int_0^X e^{-t} |\sin t| dt < V_{n+1} - \pi e^{-n\pi}$$

Donc d'après le théorème de convergence par comparaison (car  $e^{-n\pi} \rightarrow 0$ ) :

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} |\sin t| dt := \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-t} |\sin t| dt = \lim V_n = \frac{1}{2} \coth \frac{\pi}{2}$$

2. (a) Soit  $X > 0$ . Notons par linéarité de l'intégrale et deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^X e^{-t} \mu(t) dt &= \int_0^X e^{-t} (\varphi''(t) + \varphi(t)) dt = \int_0^X \underbrace{e^{-t}}_{u(t)} \underbrace{\varphi''(t)}_{v'(t)} dt + \int_0^X e^{-t} \varphi(t) dt \\ &= [e^{-t} \varphi'(t)]_0^X + \int_0^X \underbrace{e^{-t}}_{u(t)} \underbrace{\varphi'(t)}_{v'(t)} dt + \int_0^X e^{-t} \varphi(t) dt \\ &= e^{-X} \varphi'(X) + [e^{-t} \varphi(t)]_0^X + 2 \int_0^X e^{-t} \varphi(t) dt = e^{-X} (\varphi'(X) + \varphi(X)) + 2 \int_0^X e^{-t} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

car  $\varphi'(0) = \varphi(0) = 0$

$$\forall X > 0, \int_0^X e^{-t} \mu(t) dt = e^{-X} (\varphi'(X) + \varphi(X)) + 2 \int_0^X e^{-t} \varphi(t) dt$$

(b) On a vu que pour  $\mu = |\sin|$ ,  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont bornées, donc  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} (\varphi'(X) + \varphi(X)) = 0$ .

$$\text{On a donc : } \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \mu(t) dt = 2 \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \varphi(t) dt$$

(c)

$$\text{Ainsi } \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \varphi(t) dt = \frac{1}{4} \coth \frac{\pi}{2}$$