Devoir à la maison n°4

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et H_1 et H_2 deux sous-groupes de G.
On pose $H_1H_2 = \{x \cdot y \mid x \in H_1, y \in H_2\}$.

1. Montrer que H_1H_2 est un sous-groupe de G si et seulement si $H_1H_2 = H_2H_1$.
   On fera bien attention que cela ne signifie pas que nécessairement $xy = yx$...
2. On suppose que H_1 et H_2 sont finis et $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ où e est le neutre de G.
   Montrer que $\mathrm{Card}(H_1H_2) = \mathrm{Card}(H_1) \times \mathrm{Card}(H_2)$. *On pourra exploiter une bijection...*
3. Montrer que le cardinal (=ordre) de tout sous groupe H du groupe G fini divise l'ordre de G.
   On notera que $\mathcal{R}$ définie par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ est une relation d'équivalence,
   puis utilisera la partition de G par les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.
4. En déduire que si H est un groupe d'ordre p, premier, alors pour tout $a \neq e \in H$:
   $\forall\ x \in H \exists\ k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $x = a^k$.
   Dans ce cas (où H est également fini), on dit que H est cyclique.
   On pourra montrer $A = \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de H....
5. On suppose que G est abélien, H_1 et H_2 d'ordres finis p et q, nombres premiers distincts.
   Montrer, en exploitant toutes les questions précédentes, que H_1H_2 est un sous-groupe cyclique de G.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - x$.

1. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble I à déterminer.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $f(x) = n$, a une solution unique sur $\mathbb{R}_+$, notée u_n.
3. Que vaut u_1 ?
4. Montrer que u_n est croissante.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ln n$. En déduire la limite de (u_n).
6. Montrer que $\exp(u_n) \sim n$.

On note $v_n = u_n - \ln n$.

7. Déduire de la question précédente que $v_n \to 0$.
8. Montrer ensuite que $v_n \sim \frac{\ln n}{n}$
   On pourra exploiter, après justification,que $e^{v_n} - 1 \sim v_n$
9. En déduire un développement asymptotique de u_n à deux termes.

Problème

On associe, à tout suite (u_n) bornée, les deux suites $m(u)$ et $M(u)$ telles que :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(m(u))_n = \inf\{u_k, k \geqslant n\}$.
  On notera (m_n) s'il n'y a pas de doute sur la suite (u_n) considérée.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(M(u))_n = \sup\{u_k, k \geqslant n\}$ *On notera (M_n) s'il n'y a pas de doute sur la suite (u_n) considérée.*

On notera $U_n = \{u_k, k \geqslant n\}$.

1. On considère une suite (u_n) bornée, quelconque.
   (a) Pourquoi les suite (m_n) et (M_n) sont bien définies.

(b) Montrer que (m_n) et (M_n) sont bornées.

(c) Montrer que (m_n) est une suite croissante et (M_n) une suite décroissante.
En déduire qu'elles convergent.

On note pour tout (u_n) bornée, $\liminf u_n = \lim(m(u))_n$ et $\limsup u_n = \lim(M(u))_n$

2. Quelques exemples.
   (a) Calculer $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ pour $u : n \mapsto (-1)^n$.
   (b) Calculer $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ pour $u : n \mapsto \frac{1}{n+1}$.
   (c) Calculer $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ pour u, suite convergente vers ℓ.
3. Une suite particulière.
   On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$, $d_n = \sum_{d|n} 1$ le nombre de diviseurs distincts de n.
   (a) Calculer d_2, d_3, d_{15}.
   (b) Montrer que $\liminf d_n = 2$.
   (On comprendra bien la définition $\liminf$ *même si d_n n'est pas bornée (elle est minorée)).*
   (c) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(d_{\varphi(n)})$ est strictement croissante.
   On ne peut donner une indication stable sur le comportement asymptotique de (d_n).
4. Regardons le résultat moyen (Cesaro). On note $D_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k$.
   (a) On note H_k, l'hyperbole d'équation $yx = k$ (branche positive : $x, y > 0$).
   Montrer que d_n est le nombre de points à coordonnées entières sur H_n.
   (b) En déduire que nD_n est le nombre de points à coordonnées entière compris entre l'hyperbole H_n et les demi-axes $y = 0 (x > 0)$ et $x = 0 (y > 0)$.
   (c) Combien de ces points ont k comme abscisse ?
   En déduire que $D_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$.
   (d) En déduire que $D_n = \ln n + O(1)$.
   On « rappelle » que $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \sim \ln n$