

Devoir à la maison n°5 CORRECTION

Exercice 1 (n°296) - Fonctions à variations bornées

1. Là, c'est libre (et non nécessairement facile à corriger...).

Si on prend $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\pi x)$.

Comme f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, à valeurs dans $[0, 1]$:

en supposant que $\frac{1}{2} \in [x_p, x_{p+1}[$

$$\begin{aligned}\Sigma(f, (x_0, \dots, x_n)) &= \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^p (f(x_k) - f(x_{k-1})) + \sum_{k=p+1}^n (f(x_{k-1}) - f(x_k)) + |f(x_{p+1}) - f(x_p)| \\ &= f(x_p) - f(x_0) + f(x_{p+1}) - f(x_n) + \max(f(x_p), f(x_{p+1})) - \min(f(x_p), f(x_{p+1})) \\ &= 2 \max(f(x_p), f(x_{p+1})) - f(x_0) - f(x_n) \leq 2 - 0\end{aligned}$$

Donc f est à variations bornées et comme 2 est un majorant : $T_f(0, 1) \leq 2$.

Mais par ailleurs, avec $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$, on trouve exactement $\Sigma(f, (0, \frac{1}{2}, 1)) = 2$.
Donner l'exemple d'une fonction f à variations bornées sur $[0, 1]$.

$$T_f(0, 1) = 2$$

2. Soient $\alpha < \beta < \gamma \in [a, b]$.

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in [\alpha, \gamma]$. On suppose que $x_0, \dots, x_r \in [\alpha, \beta]$ et $[x_{r+1}, \dots, x_n] \in [\beta, \gamma]$.

(si nécessaire, $x_r = \beta$).

Alors $\Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, \beta)) \leq T_f(\alpha, \beta)$ et $\Sigma(f, (\beta, x_0, \dots, x_r)) \leq T_f(\alpha, \beta)$ Puis

$$\begin{aligned}\Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, \beta, x_{r+1}, \dots, x_n)) &= \sum_{k=1}^r |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(\beta) - f(x_r)| + |f(x_{r+1}) - f(\beta)| + \sum_{k=r+2}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= \Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, \beta)) + \Sigma(f, (\beta, x_{r+1}, \dots, x_n)) \leq T_f(\alpha, \beta) + T_f(\beta, \gamma)\end{aligned}$$

Et :

$$\Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)) = \sum_{k=1}^r |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_{r+1}) - f(x_r)| + \sum_{k=r+2}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

Donc

$$\Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)) \leq |f(x_{r+1}) - f(x_r)| + |f(\beta) - f(x_r)| + |f(x_{r+1}) - f(\beta)| + T_f(\alpha, \beta) + T_f(\beta, \gamma)$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$|f(x_{r+1}) - f(x_r)| = |(f(x_{r+1}) - f(\beta)) + (f(\beta) - f(x_r))| \leq |f(\beta) - f(x_r)| + |f(x_{r+1}) - f(\beta)|$$

Donc

$$\Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)) \leq T_f(\alpha, \beta) + T_f(\beta, \gamma)$$

Donc $T_f(\alpha, \beta) + T_f(\beta, \gamma)$ est un majorant, il est plus grand que le plus petit des majorant :

$$T_f(\alpha, \gamma) \leq T_f(\alpha, \beta) + T_f(\beta, \gamma)$$

Maintenant, on fixe $x_0, \dots, x_r \in [\alpha, \beta]$.

Pour tout $x_{r+1}, \dots, x_n \in [\beta, \alpha]$,

$$\Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, \beta)) + \Sigma(f, (\beta, x_{r+1}, \dots, x_n)) = \Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, \beta, x_{r+1}, \dots, x_n)) \leq T_f(\alpha, \gamma)$$

Donc

$$\Sigma(f, (x_{r+1}, \dots, x_n)) = \Sigma(f, (\beta, x_{r+1}, \dots, x_n)) - |f(x_{r+1}) - f(\beta)| \leq T_f(\alpha, \gamma) - \Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, \beta)) - |f(x_{r+1}) - f(\beta)|$$

$$\Sigma(f, (x_{r+1}, \dots, x_n)) \leq T_f(\alpha, \gamma) - \Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, \beta))$$

Ainsi, on a un majorant de $\{\Sigma(f, (x_{r+1}, \dots, x_n)) \mid x_{r+1}, \dots, x_n \in [\beta, \gamma]\}$, il est plus grand que le plus petit des majorants :

$$\forall x_0, \dots, x_r \in [\alpha, \beta], \quad T_f(\beta, \gamma) \leq T_f(\alpha, \gamma) - \Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, \beta))$$

$$\forall x_0, \dots, x_r \in [\alpha, \beta], \quad \Sigma(f, (x_0, \dots, x_r, \beta)) \leq T_f(\alpha, \gamma) - T_f(\beta, \gamma)$$

$$\forall x_0, \dots, x_r \in [\alpha, \beta], \quad \Sigma(f, (x_0, \dots, x_r)) \leq T_f(\alpha, \gamma) - T_f(\beta, \gamma) - |f(\beta) - f(x_r)| \leq T_f(\alpha, \gamma) - T_f(\beta, \gamma)$$

Donc, comme $T_f(\alpha, \beta)$ est le plus petit des majorant : $T_f(\alpha, \beta) \leq T_f(\alpha, \gamma) - T_f(\beta, \gamma)$.

Ainsi :

$$T_f(\alpha, \beta) + T_f(\beta, \gamma) \leq T_f(\alpha, \gamma)$$

Par double inégalité :

$$\boxed{\forall \alpha < \beta < \gamma \in [a, b], \quad T_f(\alpha, \beta) + T_f(\beta, \gamma) = T_f(\alpha, \gamma) \quad : \quad T_f \text{ est additive.}}$$

3. Supposons que $x_1 < x_2$,

alors par additivité de T_f : $T_f(a, x_2) = T_f(a, x_1) + T_f(x_1, x_2)$, i.e. $T(x_2) = T(x_1) + T_f(x_1, x_2)$.

Or Σ est la somme de termes positifs, donc $T_f(x_1, x_2) \geq 0$, donc $T(x_2) \geq T(x_1)$.

Ainsi T est croissante.

Avec les mêmes notations,

$$(T - f)(x_2) - (T - f)(x_1) = T_f(x_1, x_2) - f(x_2) + f(x_1)$$

Or $(x_1, x_2) \in [x_1, x_2]$, donc $\Sigma(f, (x_1, x_2)) = |f(x_2) - f(x_1)| \leq T_f(x_1, x_2)$.

Alors $f(x_2) - f(x_1) \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq T_f(x_1, x_2)$ et donc $(T - f)(x_2) - (T - f)(x_1) \geq 0$.

Ainsi $T - f$ est également croissante.

$$\boxed{T \text{ et } T - f \text{ sont croissantes.}}$$

4. On applique la question précédente car $f = T - (T - f)$, avec T et $T - f$ croissante.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est à variations bornées, elle est la différence de deux fonctions croissantes.}}$$

Il n'y a pas unicité. Si on ajoute une fonction croissante bornée à T et la même à $T - f$, on trouve un autre couple de solution.

A moins de changer la relation d'équivalence d'égalité, il n'y a pas unicité.

5. On note $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f est dérivable sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$, par produit et composition de fonctions dérivables.

Et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \cos^2 \frac{\pi}{x^2} + 2 \frac{-2\pi}{x^3} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} \times (-\sin \frac{\pi}{x^2}) = 2x \cos^2 \frac{\pi}{x^2} + 4 \frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x^2}$.

Alors que $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| x \cos^2 \frac{\pi}{x^2} \right| \leq |x|$, donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

🔍 Remarques !

🔍 On remarque que f n'est pas de classe C^1 car $\lim_0 f' \neq f'(0) = 0$

Il reste à montrer que f n'est pas à variations bornées.

Il suffit pour cela de trouver (« comme par magie »), une famille de subdivisions non majorée.

Mais comment la trouver ?

☀ Piste de recherche...

Comme f est paire, on va étudier ces questions que sur $[0, 1]$.

Soit pour tout entier k , $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $y_k = \frac{1}{\sqrt{k + \frac{1}{2}}}$.

Alors pour tout $x, x' \in [y_k, x_k]$ avec $x < x'$,

$$(k + \frac{1}{2})\pi = \frac{\pi}{y_k^2} \geq \frac{\pi}{x^2} > \frac{\pi}{x'^2} \geq \frac{\pi}{x_k^2} = k\pi$$

Puis, $\cos^2$ est décroissante sur $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}]$:

$$0 = \cos(k + \frac{1}{2})\pi \leq \cos^2 \frac{\pi}{x^2} < \cos^2 \frac{\pi}{x'^2} \leq \cos^2 k\pi = ((-1)^k)^2 = 1$$

Comme $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[y_k, x_k]$:

$$0 \leq f(x) < f(x') \leq x_k^2$$

Donc si $x, x' \in [y_k, x_k]$, $|f(x') - f(x)| \leq f(x_k) - f(y_k) = x_k^2 = \frac{1}{k}$.

De même, on montre que pour $x_k \leq x < x' \leq y_{k-1}$:

$$0 \leq f(x') < f(x) \leq x_k^2$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Cela signifie que le choix de nombre } x, x' \text{ dans l'intervalle } [y_k, x_k] \text{ (resp. } [x_k, y_{k-1}]) \text{ ne change rien aux} \\ \text{calculs (les valeurs absolues disparaissent, toutes dans le même sens, et le nombre se télescope).} \\ \text{Il reste au plus les valeurs en } x_k \text{ et } y_k. \text{ On va donc se contenter de ces nombres !} \end{array} \right\}$

Soit $K \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $y_k = \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}$.

Alors $f(x_k) = x_k^2 \cos^2(k\pi) = \frac{1}{k}$ et $f(y_k) = y_k^2 \cos^2(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$.

On note également que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_{k+1} < y_k < x_k < \dots < x_1 = 1$.

$$\begin{aligned}
 \Sigma(f, (x_K, y_{K-1}, x_{K-1}, \dots, y_1, x_1)) &= \sum_{h=1}^{K-1} (|f(y_h) - f(x_h)| + |f(x_{h+1}) - f(y_h)|) = \sum_{h=1}^{K-1} \frac{1}{h} + \frac{1}{h+1} \\
 &= \sum_{h=1}^{K-1} \frac{1}{h} + \sum_{h=2}^K \frac{1}{h} \geq \ln(K) + \ln(K+1) - 1 \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} +\infty
 \end{aligned}$$

(On a exploité l'inégalité « bien connue » : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$)

f est dérivable (mais pas de classe $\mathcal{C}^1$, mais f n'est pas à variations bornées.

Exercice 2 (n°297) - Jauge et lemme de Cousin

Soit $c \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

- Si $t \neq c$, alors $\delta(t) = \frac{1}{2}|t - c| > 0$ car $t - c \neq 0$.
Si $t = c$, alors $\delta(t) = \alpha > 0$.
Donc pour tout $t \in [a, b]$, $\delta(t) > 0$,

δ est une jauge de $[a, b]$.

- On peut supposer que $\mathcal{D} = ([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)$.

Comme $c \in [a, b]$, il existe donc $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $c \in [x_{i-1}, x_i]$.

t_i est le point de marquage de cet intervalle.

Si $t_i \neq c$.

Ou bien $t_i < c \leq x_i$.

$$\text{Alors } c \leq x_i \leq t_i + \frac{\delta(t_i)}{2} = t_i + \frac{1}{4}|t_i - c| = t_i + \frac{1}{4}(c - t_i) = \frac{3}{4}t_i + \frac{1}{4}c < \frac{3}{4}c + \frac{1}{4}c.$$

C'est absurde.

Ou bien $t_i > c \geq x_{i-1}$.

$$\text{Alors } c \geq x_i \geq t_i - \frac{\delta(t_i)}{2} = t_i - \frac{1}{4}|t_i - c| = t_i - \frac{1}{4}(t_i - c) = \frac{3}{4}t_i + \frac{1}{4}c > \frac{3}{4}c + \frac{1}{4}c.$$

C'est absurde.

Donc nécessairement $t_i = c$

c est nécessairement un point de marquage de $\mathcal{D}$.

A la première lecture...

 On considère plusieurs points particuliers (ordonnés) : $c_1 < c_2 < \dots < c_p$.

 On a vu que si $c_i \in [x_{j-1}, x_j]$, alors aucun $t \notin \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$ peut être un point de marquage.

Donc pour que c_i ne soit pas un point de marquage, il faut que t_j soit un autre point de la forme c_k .

 Ce qui nécessite que $|c_i - c_k| < \frac{\delta(c_k)}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

 Réciproquement, faisons la synthèse de ces idées, et regardons si cela marche.

On suppose que $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_p \leq b$. On note $\alpha = \min \left\{ \frac{c_{i+1} - c_i}{2}, i \in \mathbb{N}_{p-1} \right\}$.

Pour faciliter la définition de δ , on considère également pour tout $i \in \mathbb{N}_{p-1}$, $d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{2}$, milieu entre c_i et c_{i+1} . Considérons :

$$\begin{aligned} \delta : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t &\longmapsto \begin{cases} \alpha & \text{si } \exists i \in \mathbb{N}_p \text{ tel que } t = c_i \\ \frac{|t - c_i|}{2} & \text{si } \exists i \in \mathbb{N}_p \text{ tel que } t \in [d_i, d_{i+1}[\\ \frac{|t - c_1|}{2} & \text{si } t \in [a, d_1[\text{ (si non vide)} \\ \frac{|t - c_p|}{2} & \text{si } t \in [d_{p-1}, b] \text{ (si non vide)} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme pour tout $i \in \mathbb{N}_{p-1}$, $\frac{c_{i+1} - c_i}{2} > 0$ et que l'ensemble $\left\{ \frac{c_{i+1} - c_i}{2}, i \in \mathbb{N}_{p-1} \right\}$ est fini : $\alpha > 0$.

et pour tout $t \notin \{c_1, \dots, c_p\}$, $\delta(t) > 0$. Donc δ est bien une jauge.

Ensuite, considérons une subdivision $\mathcal{D} = ([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)$ δ -fine.

Soit $k \in \mathbb{N}_p$. Comme $c_k \in [a, b]$, il existe donc $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $c_k \in [x_{i-1}, x_i]$.

t_i est le point de marquage de cet intervalle.

Si $t_i \notin \{c_1, \dots, c_p\}$.

Alors comme pour la question 2, on a une contradiction : $|t - c_k| < \frac{|t - c_k|}{2}$.

Donc il existe $j \in \mathbb{N}_p$ tel que $t_i = c_j$.

$$\text{Alors } |t_i - c_k| = |c_j - c_k| < \frac{\delta(c_j)}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Si $j \neq k$, alors $|c_j - c_k| \geq \min(c_{k+1} - c_k, c_k - c_{k-1}) \geq \alpha$. Donc $\frac{\alpha}{2} \geq \alpha > 0$. Impossible.

Par conséquent, $t_i = c_k$.

Avec δ comme précédemment, toute les subdivision δ -fine auront $c_1, \dots, c_p$ comme points de marquage.

Remarques !

 On dit qu'avec une telle fonction δ , on a fait un forçage de point de marquage.

 Nous le ferons (une ou deux fois) lorsque nous définirons l'intégrale de KH passant par des points particuliers