Devoir à la maison n°5

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$. La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Exercice 1 (n°296)

Fonctions à variations bornées

On considère un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On note pour tout f définie sur $[a,b]$ et $x_1, \dots x_n \in [a,b]$, $\Sigma(f,(x_0,\dots x_n)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$.

On dit que f est à variations bornées si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x_0 < x_1 \cdots < x_n$, $\Sigma(f,(x_0,\dots x_n)) \leqslant M$.

On note alors $T_f(a,b)$, le plus petit des minorants.

1. Donner l'exemple d'une fonction f à variations bornées sur $[0,1]$.
   Que vaut alors $T_f(0,1)$?
2. Montrer que T_f est additive.
3. On considère une fonction f à variations bornées sur $[a,b]$.
   On note $T : x \mapsto T_f(a,x)$.
   Montrer que T et $T - f$ sont croissantes.
4. En déduire que si f est à variations bornées, elle est la différence de deux fonctions croissantes.
   Sont-elles uniques ?
5. On note $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2\cos^2\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   Montrer que f est dérivable, mais n'est pas à variations bornées.

Exercice 2 (n°297)

Jauge et lemme de Cousin

Soit $c \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

1. Montrer que $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}|t-c| & \text{si} \quad x \neq c \\ \alpha & \text{s} \quad x = c \end{cases}$ est une jauge
2. Soit $\mathcal{D}$ une subdivision pointé δ-fine de $[a,b]$. Montrer que c est nécessairement un point de marquage de $\mathcal{D}$.
3. Quelle jauge δ considérer, pour forcer les subdivision δ-fine à contenir nécessairement p points particuliers c_1,$\dots c_p$ de $[a,b]$ comme points de marquage ?