 Pour le 07.01.20

Devoir à la maison n°6

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$. La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Exercice 1

On note $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On définit, par récurrence une suite de fonctions $(P_n)_{n\geqslant 0}$:

$$P_0 : x \mapsto 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, P_{n+1} : x \mapsto (1+x^2)P_n'(x) + (1-2n)xP_n(x)$$

2. Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynomiale de degré $\leqslant n$.
4. Quel est le rapport entre $f^{(n)}$ et P_n ?
5. On note pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $h_\alpha : x \mapsto (1+x^2)^\alpha$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiale (Q_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $h_\alpha^{(n)}(x) = Q_n(x) \times (1+x^2)^{\alpha-n}$.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E) $xy' + y = \text{ch}(x)$. Soit (H) l'équation homogène associée.

1. Donnez les domaines d'intégration de (E).
2. Résoudre (E) sur ses domaines d'intégration.
3. Trouvez toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et solution de (H) sur $\mathbb{R}$.
4. Trouvez toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Trouvez toutes les solutions définies et solution sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle :

$$\text{sh}(2x)y' - 2y = 0$$

   (b) Trouvez toutes les solutions définies et solution sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle :

$$\text{sh}(2x)y'' + (\text{sh}(2x) - 2)y' - 2y = 0$$