MPSI 3 - Fermat Le 11.01.20
2019-2020

Devoir surveillé n°5

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé de deux exercices et d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice 1 - Transformation de Lorentz / ? ?

Les expériences de Michelson (1881) puis Morley (1887) ont donné l'assurance aux physiciens que la vitesse de la lumière est toujours la même dans tous les référentiels galiléens.
Les transformations du groupe de Lorentz permettent de justifier mathématiquement ce fait.
Pour faciliter les calculs nous allons nous restreindre au cas unidimensionnel (d'espace). On considère les ensembles $E=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{G}=]-c,c[$ et l'ensemble G, des applications $\varphi_v : E \to E$.
Chacun des éléments de G est une application φ_v de E sur E,
paramétrée par un élément $v\in\mathcal{G}$ (vitesse), (avec $|v|<c$) et définie par :

$$\varphi_v : (x,t) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\big(x-vt, t-\frac{1}{c^2}vx\big)$$

1. Soit $\gamma : v \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, définie pour v, variable réelle.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de γ. Montrer que γ est paire.
   (b) Etudier les variations de γ et tracer la courbe représentative de γ (on prendra $c=4$) (On présentera les asymptotes et la tangente en $v=0$).
   (c) Ecrire le développement limité de $\gamma(v)$ à l'ordre 9 au voisinage de $v=0$.
   (d) Montrer que : $[\gamma(v)]^2 = 1+[\gamma(v)]^2\frac{v^2}{c^2}$.
   Vérifier que le développement limité trouvé vérifie bien (on se limitera à l'ordre 6) :
   $$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\times\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{6}a_kv^k+o(v^6)}_{=\mathrm{DL}_6(\gamma)(0)}\right)^2 = 1+o(v^6) \text{ pour } v\to 0$$
2. Montrer que pour tout $v\in\mathcal{G}$, pour tout $(x,t)\in E$,
   $$\text{Si} \quad (X,T)=\varphi_v(x,t) \quad \text{alors} \quad c^2T^2-X^2=c^2t^2-x^2$$
3. Montrer que pour tout v, $v'\in\mathcal{G}$,
   $$\varphi_v\circ\varphi_{v'}=\varphi_V \text{ où } V=\frac{v+v'}{1+\frac{v\times v'}{c^2}}$$
4. On définit donc sur l'ensemble $\mathcal{G}$, la loi
   $$v\oplus v' = \frac{v+v'}{1+\frac{v\times v'}{c^2}}$$
   Montrer que l'ensemble $(\mathcal{G},\oplus)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
5. Quelle est la limite de $V=v\oplus v'$, si $v\to c$? Qu'en pensez-vous ?

Le groupe de Lorentz, isomorphe à $\mathcal{G}$, est le groupe qui régit les transformation relative d'un référentiel galiléen à un autre.
Au premier ordre (pour $\|\vec{v}\| << c$), il est équivalent au groupe de Galilée rencontré dans les premiers cours de mécanique.

Exercice 2 - Démonstrations revisitées /18

On considère f, une fonction définie sur $[a, b]$ et dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$.
On démontre *d'une façon nouvelle* le théorème de l'égalité des accroissements finis (question 3).
On démontre également que même si f' n'est pas continue, elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. (question 4)

1. Quelques théorèmes et définitions
   (a) Quelle est la définition formelle de « I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ».
   (b) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
   (c) Enoncer le théorème de l'égalité des accroissements finis
2. On considère deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de I convergentes toutes les deux vers un même nombre réel $\ell \in I$.
   On suppose également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ et $b_n - a_n > 0$.
   (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que
   $$\forall\, x \in]\ell - \eta, \ell + \eta[\cap I, \qquad |f(x) - f(\ell) - (x - \ell) f'(\ell)| \leqslant \epsilon |x - \ell|$$
   (b) En déduire qu'il existe $N > 0$ tel que
   $$\forall\, n \geqslant N, \qquad |f(b_n) - f(a_n) - (b_n - a_n) f'(\ell)| \leqslant \epsilon (b_n - a_n)$$
   (c) En déduire que $\left(\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_n$ converge et donner sa limite.
3. Egalité des accroissements finis.
   (a) On note
   $$h : \begin{array}{rcl} [a, \frac{a+b}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t) \end{array}$$
   On note également $M := \dfrac{1}{2}(f(b) - f(a))$
      i. Montrer, en exploitant le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $h(t) = M$
      ii. En déduire l'existence de deux nombres a', b' tels que :
      — $a \leqslant a' < b' \leqslant b$
      — $b' - a' = \dfrac{1}{2}(b - a)$
      — $f(b') - f(a') = \dfrac{1}{2}\big(f(b) - f(a)\big)$
   (b) Montrer qu'il existe deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad b_n > a_n \text{ et } f(b_n) - f(a_n) = \frac{1}{2^n}\big(f(b) - f(a)\big)$$
   (c) En déduire (à l'aide de la question 2.) le théorème de l'égalité des accroissements finis.
4. Nous montrons maintenant que f' vérifie, sans condition supplémentaire, la même conclusion que celle du théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire ici que $f'(I)$ est un intervalle.
   (a) Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement le théorème des valeurs intermédiaires à f' ?
   (b) Soient $Y_1, Y_2 \in f'(I) = \{f'(x); x \in I\}$. On note x_1 (respectivement x_2) un nombre de I tel que $f'(x_1) = Y_1$ (resp. $f'(x_2) = Y_2$). On suppose que $Y_1 < Y_2$
   Soit $Y \in]Y_1, Y_2[$. On note $h : t \mapsto f(t) - Yt$. On suppose (SPDG) que $x_1 > x_2$.
   Montrer qu'il existe $c \in]x_2, x_1[$, point critique de h.
   (c) Conclure.

Problème - Entropie /27

On considère dans l'ensemble du problème :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} -t\ln(t) & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t=0 \end{cases} \end{array}$$

A. Etude de fonctions

1. Etude de φ.
   (a) Vérifier que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
   (c) Donner la limite de $\varphi'(t)$ lorsque t tend vers 0 dans $]0,+\infty[$.
   (d) φ est-elle dérivable en 0 ?
   (e) Etudier les variations de φ et tracer la courbe $y=\varphi(x)$.
2. Famille de fonctions.
   Pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, on note

$$\varphi_k : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} -t^k\ln(t) & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t=0 \end{cases} \end{array}$$

   (a) Montrer que φ_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que φ_k est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $[0,+\infty[$.
   (c) φ_k est-elle dérivable k fois en 0 ?
3. Soient a et $b\in[0,\infty[$ tels que $a<b$.
   Montrer qu'il existe $\epsilon\in]0,b]$ tel que

$$\varphi(a+t)+\varphi(b-t)>\varphi(a)+\varphi(b) \text{ pour tout } t\in]0,\epsilon] \qquad (I)$$

B. Continuité d'une fonction de plusieurs variables et optimisation

On donne la définition de la continuité d'une fonction de plusieurs variables :

> Soit $k\in\mathbb{N}^*$, on dit que $\psi : I\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ est continue en $\overline{x}=(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots\overline{x_p})\in I$, si
> $\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ \eta>0$ tel que : $\forall\ x=(x_1,x_2,\dots x_p)\in I,\ \Big(\forall\ i\in\mathbb{N}_p,\ |x_i-\overline{x_i}|\leqslant\eta\Big)\Longrightarrow|\psi(x)-\psi(\overline{x})|\leqslant\epsilon$

On fixe $N\geqslant 2$.
On note $\Sigma_N=\{(p_1,\dots p_N)\in\in\mathbb{R}^N \mid \sum\limits_{i=1}^N p_i=1 \text{ et } \forall\ i\in\mathbb{N}_N,\ p_i\geqslant 0\}$.

On définie ensuite $H_N=\Sigma_N\to\mathbb{R}$, $(p_1,\dots p_N)\mapsto\displaystyle\sum_{i=1}^N\varphi(p_i)$.

1. Montrer que H_N est positive (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$)
2. Calculer $H_N(p)$ si pour tout $i\in\mathbb{N}_N$, $p_i=\frac{1}{N}$
3. Montrer que H_N est continue en tout $p\in\Sigma_N$ (on dit que H_N est continue sur Σ_N).
4. Optimisation.
   (a) Montrer que $H_N(\Sigma_N)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ majoré.
   On note $M=\sup\{H_n(p),p\in\Sigma_N\}$.
   (b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $p^n=(p_1^n,\dots p_N^n)\in\Sigma_N$ tel que $|H_N(p_N)-M|\leqslant\frac{1}{n}$
   (c) En exploitant plusieurs fois le théorème de Bolzano-Weierstrass, montrer qu'il existe $\overline{p}\in\Sigma_n$ tel que $\forall\ p\in\Sigma_N,\ H_N(p)\leqslant H_N(\overline{p})$
5. On suppose que $\overline{p}=(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\dots\overline{p}_N)\neq(\frac{1}{N},\frac{1}{N},\dots\frac{1}{N})$.
   (a) Montrer qu'il existe $i,j\in\mathbb{N}_N$ tel que $\overline{p_i}<\overline{p_j}$ et $\epsilon>0$ tels que

$$\forall\ t\in]0,\epsilon],\qquad \varphi(\overline{p_i}+t)+\varphi(\overline{p_j}-t)>\varphi(\overline{p_i})+\varphi(\overline{p_j})$$

   (b) En déduire une contradiction et donc pour $p\in\Sigma_N$,

$$H_N(p)\leqslant\ln N$$