Devoir à la maison n°6
CORRECTION

Exercice 1

On note $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

1. On note que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geqslant 1 > 0$.
   Donc f est définie sur $\mathbb{R}$. Il s'agit de la composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

On définit, par récurrence une suite de fonctions $(P_n)_{n\geqslant 0}$:

$$P_0 : x \mapsto 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, P_{n+1} : x \mapsto (1+x^2)P_n'(x) + (1-2n)xP_n(x)$$

2. On trouve (directement) :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad P_1(x) = x,\ P_2(x) = (1+x^2) - x^2 = 1 \ \text{ et } P_3(x) = -3x}$$

3. On démontre ce résultat par récurrence.
   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$: « P_n est une fonction polynomiale de degré $\leqslant n$. »
   — Avec les calculs précédents, on a $\mathcal{H}_0$ (mais aussi $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$)
   — Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
   Alors P_n' est une fonction polynomiale de degré $\leqslant n-1$.
   Par produit : $x \mapsto (1+x^2)P_n'(x)$ et $x \mapsto (1-2n)xP_n(x)$ sont des fonctions polynomiales de degré $\leqslant n+1$.
   Par addition : $x \mapsto P_{n+1}(x)$ est une fonction polynomiale de degré $\leqslant n+1$.
   Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } \leqslant n.}$$

4. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x) \times (1+x^2)^{\frac{1}{2}-n}$ ».
   — $f^{(0)} = f$ et donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
   Par dérivation d'un produit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= P_n'(x) \times (1+x^2)^{\frac{1}{2}-n} + 2x(\tfrac{1}{2}-n)P_n(x) \times (1+x^2)^{\frac{1}{2}-n-1} \\ &= \left[(1+x^2)P_n'(x) + (1-2n)xP_n(x)\right](1+x^2)^{\frac{1}{2}-(n+1)} \end{aligned}$$

   Or $P_{n+1} : x \mapsto (1+x^2)P_n'(x) + (1-2n)xP_n(x)$ Donc $f^{(n+1)} : x \mapsto P_{n+1}(x)(1+x^2)^{\frac{1}{2}-(n+1)}$.
   Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x) \times (1+x^2)^{\frac{1}{2}-n}}$$

5. On note pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $h_\alpha : x \mapsto (1+x^2)^\alpha$. De la même façon, on définit par récurrence la suite de fonctions polynomiales (avec contrôle du degré) :

$$\boxed{T_0 : x \mapsto 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, T_{n+1} : x \mapsto (1+x^2)T_n'(x) + (2\alpha - 2n)xT_n(x)}$$

   On a alors

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad h_\alpha^{(n)}(x) = T_n(x) \times (1+x^2)^{\alpha-n}}$$

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E) $xy' + y = \mathrm{ch}(x)$. Soit (H) l'équation homogène associée.

1. En mettant (E) sous forme normalisée, on trouve

$$\boxed{\text{les domaines d'intégration de } (E) \text{ sont } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathbb{R}_-^*}$$

2. On commence par résoudre (H) : $y_H : x \mapsto \lambda \exp(-\ln x) = \dfrac{\lambda}{x}$.

   On peut appliquer la méthode de la variation de la constante. On considère $y : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x}$.

$$y \in \mathcal{S}_E \iff \lambda'(x) = \mathrm{ch}(x) \iff \lambda(x) = \mathrm{sh}(x) + K$$

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x) + K}{x} ; K \in \mathbb{R} \right\}}$$

3. Soit f une solution de (H) sur $\mathbb{R}$.

   Alors $f_{|\mathbb{R}_+^*}$ est une solution de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe $\lambda_+ \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x > 0,\ f(x) = \dfrac{\lambda_+}{x}$.

   Alors $f_{|\mathbb{R}_-^*}$ est une solution de (H) sur $\mathbb{R}_-^*$, donc il existe $\lambda_- \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x > 0,\ f(x) = \dfrac{\lambda_-}{x}$.

   Puis f est continue (car dérivable) en 0, or $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_+ = 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda_+ > 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda_+ < 0 \end{cases}$.

   La seule limite finie possible correspond donc à $\lambda_+ = 0$. Et de même il faut que $\lambda_- = 0$.
   Réciproquement, la fonction nulle est bien solution de (H) sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Il y a une et une seule solution de } (H) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ (entier) : } x \mapsto 0}$$

4. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

   Alors $f_{|\mathbb{R}_+^*}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe $\lambda_+ \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x > 0,\ f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x) + \lambda_+}{x}$.

   Alors $f_{|\mathbb{R}_-^*}$ est une solution de (H) sur $\mathbb{R}_-^*$, il existe $\lambda_- \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x > 0,\ f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x) + \lambda_-}{x}$.

   Puis f est continue (car dérivable) en 0, or $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_+ = 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda_+ > 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda_+ < 0 \end{cases}$.

   Réciproquement, la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$:

   elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 : $\dfrac{\mathrm{sh}x}{=} \dfrac{1}{2} \dfrac{e^x - 1}{x} - \dfrac{1}{2} \dfrac{e^{-}x - 1}{x} \to \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 1$.

   elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et (DL) en 0, $\dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{\mathrm{sh}x - x}{x^2} \sim \dfrac{x}{6} \to 0$

$$\boxed{\text{Il y a une et une seule solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ (entier) : } x \mapsto \frac{\mathrm{sh}x}{x}}$$

Piste de recherche...

5. (a) *On a besoin de trouver ici une primitive de* $x \mapsto \dfrac{2}{sh(2x)}$.

$$\int \frac{1}{sh(2x)} dx = \int \frac{1}{2sh(x)ch(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{ch^2(x)} \times \frac{1}{th(x)} dx = \frac{1}{2} \ln(|th(x)|) + K$$

   On applique la même méthode. Comme $\mathrm{sh}(2x) = 0 \iff x = 0$.
   Soit f une solution de $\mathrm{sh}(2x)y' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   Alors $f_{|\mathbb{R}_+^*}$ est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$,
   il existe $\mu_+ \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|\mathbb{R}_+^*} : x \mapsto \mu_+ \exp(\frac{1}{2} \ln(|\mathrm{th}(x)|)) = \mu_+ \sqrt{\mathrm{th}(x)}$ $(x > 0)$.
   Alors $f_{|\mathbb{R}_-^*}$ est une solution sur $\mathbb{R}_-^*$,
   il existe $\mu_- \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|\mathbb{R}_-^*} : x \mapsto \mu_- \exp(\frac{1}{2} \ln(|\mathrm{th}(x)|)) = \mu_- \sqrt{-\mathrm{th}(x)}$ $(x < 0)$.
   Pour tout $\mu_\pm$, ces fonctions ont une limite nulle en 0. La continuité de f n'impose rien.
   Puis $\dfrac{\sqrt{\mathrm{th}(x)} - 0}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{=} \dfrac{\sqrt{x + o(x)}}{x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Donc f n'est pas dérivable en 0.

$$\boxed{\text{Il y a une et une seule solution de } \mathrm{sh}(2x)y' - 2y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ (entier) : } x \mapsto 0}$$

   (b) On note $z = y' + y$. Alors z est solution de $\mathrm{sh}(2x)z' - 2z = 0$ et z de classe $\mathcal{C}^1$.
   D'après la question précédente : $z = 0$.
   Ainsi, y est solution de $y' + y = 0$ i.e. $\exists\, \nu \in \mathbb{R}$ tel que $y : x \mapsto \nu e^{-x}$.
   Réciproquement, si $g_\nu : x \mapsto \nu e^{-x}$,
   alors $\mathrm{sh}(2x)g_\nu''(x)(\mathrm{sh}(2x) - 2)g_\nu'(x) - 2g_\nu = (\mathrm{sh}(2x) - \mathrm{sh}(2x) + 2 - 2)e^{-x} = 0$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } \mathrm{sh}(2x)y'' + (\mathrm{sh}(2x) - 2)y' - 2y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ (entier) est } \mathcal{S} = \{x \mapsto \nu e^{-x}, \nu \in \mathbb{R}\}}$$