

Devoir surveillé n°5 CORRECTION

Exercice - Transformation de Lorentz

1. Soit $\gamma : v \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

- (a) $\gamma(v)$ est définie, si et seulement si $1 - \frac{v^2}{c^2} > 0$, donc si et seulement si $v \in]-c, c[$
Et pour tout $v \in]-c, c[$, $-v \in]-c, c[$ et $\gamma(-v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(-v)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = f(v)$ /1

$$\mathcal{D}_\gamma =]-c, c[\text{ et } \gamma \text{ est paire.}$$

On l'étudie donc que sur $[0, v[$ et on tracera la symétrie par rapport à l'axe Oy .

- (b) Sur $\mathcal{D}_\gamma$, γ est dérivable et $\forall v \in \mathcal{D}_\gamma$, /1

$$\gamma'(v) = \frac{-\frac{2v}{c^2}}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}(1 - \frac{v^2}{c^2})} = \frac{v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Donc γ est strictement croissante sur $]0, c[$.

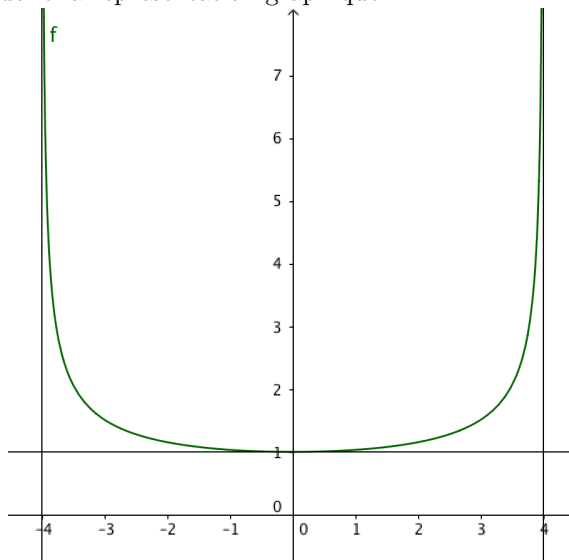
Puis comme $\lim_{v \rightarrow c} \gamma(v) = +\infty$, /0,5

$$\text{la droite d'équation } x = c \text{ est une asymptote (verticale) de } \mathcal{C}_\gamma.$$

Enfin, comme $\gamma(0) = 1$ et $\gamma'(0) = 0$, /0,5

$$\text{la droite d'équation } y = 1 \text{ est la tangente à } \mathcal{C}_\gamma \text{ en } x = 0.$$

On a donc la représentation graphique : /1



- (c) $\gamma(v) = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$, avec $X = \frac{v^2}{c^2}$, le développement à l'ordre 4 de $(1 - X)^{-1/2}$ est suffisant.
Pour X au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} (1 - X)^{-1/2} &= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}(-X) + \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2}}{2!}(-X)^2 + \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \frac{-5}{2}}{3!}(-X)^3 + \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \frac{-5}{2} \frac{-7}{2}}{4!}(-X)^4 + O(X^5) \\ &= 1 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2 + \frac{5}{16}X^3 + \frac{35}{64}X^4 + O(X^5) \end{aligned}$$

On a donc, au voisinage de 0 :

$$\gamma(v) = 1 + \frac{1}{2c^2}v^2 + \frac{3}{8c^4}v^4 + \frac{5}{16c^6}v^6 + \frac{35}{64c^8}v^8 + O(v^{10})$$

$$f(v) = 1 + \frac{1}{2c^2}v^2 + \frac{3}{8c^4}v^4 + \frac{5}{16c^6}v^6 + \frac{35}{64c^8}v^8 + o(v^9) \text{ au voisinage de } 0$$

/1,5

(d) Posons $A = \gamma(v)$, donc $A^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, donc

/0,5

$$\boxed{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)[\gamma(v)]^2 = 1 \iff [\gamma(v)]^2 = 1 + [\gamma(v)]^2 \frac{v^2}{c^2}}$$

On a alors (en se limitant à l'ordre 6) :

$$\begin{aligned} [\gamma(v)]^2 &= \left(1 + \frac{1}{2c^2}v^2 + \frac{3}{8c^4}v^4 + \frac{5}{16c^6}v^6 + o(v^6)\right)^2 \\ &= 1 + 2 \times 1 \times \frac{1}{2c^2}v^2 + 2 \times 1 \times \frac{3}{8c^4}v^4 + \left(\frac{1}{2c^2}v^2\right)^2 \\ &\quad + 2 \times 1 \times \frac{5}{16c^6}v^6 + 2 \times \frac{1}{2c^2}v^2 \times \frac{3}{8c^4}v^4 + o(v^6) \\ &= 1 + \frac{1}{c^2}v^2 + \frac{1}{c^4}v^4 + \frac{1}{c^6}v^6 + o(v^6) \end{aligned}$$

Donc

/2

$$\boxed{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\gamma(v) = 1 + \frac{1}{c^2}v^2 + \frac{1}{c^4}v^4 + \frac{1}{c^6}v^6 - \frac{1}{c^2}v^2 - \frac{1}{c^4}v^4 - \frac{1}{c^6}v^6 + o(v^6) = 1 + o(v^6)}$$

2. Soit $v \in \mathcal{G}$, et $(x, t) \in E$. On note $(X, T) = \varphi_v(x, t)$.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(c^2T^2 - X^2) &= c^2\left(t - \frac{1}{c^2}vx\right)^2 - (x - vt)^2 \\ &= c^2t^2 - 2tvx + \frac{v^2x^2}{c^2} - x^2 + 2vxt - v^2t^2 \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(c^2t^2 - x^2) \end{aligned}$$

Donc en divisant par $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \neq 0$, on a donc

/1

$$\boxed{\forall v \in \mathcal{G}, \forall (x, t) \in E, \text{ si } (X, T) = \varphi_v(x, t) \text{ alors } c^2T^2 - X^2 = c^2t^2 - x^2}$$

On a trouvé un invariant de transformation de Lorenz.

3. Soient $v, v' \in \mathcal{G}$, soit $(x, t) \in E$,

$$\begin{aligned} (\varphi_v \circ \varphi_{v'})(x, t) &= \varphi_v(\varphi_{v'}(x, t)) = \varphi_v\left(\gamma(v')(x - v't, t - \frac{1}{c^2}v'x)\right) \\ &= \gamma(v)\gamma(v')\left((x - v't) - v\left(t - \frac{1}{c^2}v'x\right), \left(t - \frac{1}{c^2}v'x\right) - \frac{1}{c^2}v(x - v't)\right) \\ &= \gamma(v)\gamma(v')\left(\left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)x - (v + v')t, \left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)t - \frac{1}{c^2}(v + v')x\right) \\ &= \frac{1 + \frac{vv'}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}}\left(x - \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}t, t - \frac{1}{c^2}\frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}x\right) \end{aligned} \quad /1$$

On pose alors $V = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$.

Alors,

$$\begin{aligned} \gamma(V) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v + v')^2}{c^2(1 + \frac{vv'}{c^2})^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2 + 2vv' + v'^2}{c^2 + 2vv' + \frac{v^2v'^2}{c^2}}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 + 2vv' + \frac{v^2v'^2}{c^2} - v^2 - 2vv' - v'^2}{c^2(1 + \frac{vv'}{c^2})^2}}} = \frac{(1 + \frac{vv'}{c^2})}{\sqrt{1 + \frac{v^2v'^2}{c^4} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v'^2}{c^2}}} \\ &= \frac{1 + \frac{vv'}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}} \end{aligned} \quad /2$$

Et on a donc bien

$$\boxed{\varphi_v \circ \varphi_{v'} = \varphi_V \text{ avec } V = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}}$$

4. On définit donc sur l'ensemble $\mathcal{G}$, la loi

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

On ne peut pas montrer que c'est un sous-groupe, car même s'il bien vrai que $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ est un groupe ; la loi n'est pas la même !!.

Notons :

— pour tout $v \in \mathcal{G}$,

$$0 \oplus v = \frac{0 + v}{1 + \frac{0 \times v}{c}} = v \text{ et de même } v \oplus 0 = v$$

Donc $\mathcal{G}$ admet un élément neutre : 0.

/0,5

— Soit $v \in \mathcal{G} =]-c, c[$.

Soit $-v$, son opposé dans $\mathbb{R}$, alors $-v \in \mathcal{G} =]-c, c[$,

$$v \oplus (-v) = \frac{v + (-v)}{1 + \frac{v \times (-v)}{c^2}} = 0 = (-v) \oplus v$$

Donc tout élément de $\mathcal{G}$ admet un opposé, dans $\mathcal{G}$

/0,5

— On va d'abord démontrer la commutativité. C'est simple et on l'exploitera pour l'associativité.

Soient $v, v' \in \mathcal{G}$

/0,5

$$v \oplus v' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} = \frac{v' + v}{1 + \frac{v'v}{c^2}} = v' \oplus v$$

— L'associativité découle de l'associativité de la composition de fonctions, mais on va la redémontrer « localement ».

Soient v_1, v_2 et $v_3 \in \mathcal{G}$.

$$\begin{aligned} v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3) &= v_1 \oplus \frac{v_2 + v_3}{1 + \frac{v_2 v_3}{c^2}} = \frac{v_1 + \frac{v_2 + v_3}{1 + \frac{v_2 v_3}{c^2}}}{1 + \frac{v_1 \frac{v_2 + v_3}{1 + \frac{v_2 v_3}{c^2}}}{c^2}} = \frac{(v_1 + v_2 + v_3 + \frac{v_1 v_2 v_3}{c^2}) \frac{1}{1 + \frac{v_2 v_3}{c^2}}}{1 + \frac{v_1 v_2 + v_1 v_3}{c^2 + v_2 v_3}} \\ &= \frac{c^2 (v_1 + v_2 + v_3 + \frac{v_1 v_2 v_3}{c^2})}{c^2 + v_2 v_3 + v_1 v_2 + v_1 v_3} = \frac{c^2 v_1 + c^2 v_2 + c^2 v_3 + v_1 v_2 v_3}{c^2 + v_2 v_3 + v_1 v_2 + v_1 v_3} \end{aligned}$$

La dernière expression est totalement symétrique en v_1, v_2, v_3 .

Donc, en exploitant la commutativité de $\mathcal{G}$:

/1,5

$$v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3) = v_3 \oplus (v_1 \oplus v_2) = (v_1 \oplus v_2) \oplus v_3$$

Donc

l'ensemble $(\mathcal{G}, \oplus)$ est un groupe commutatif

5. Soit $v, v' \in \mathcal{G} =]-c, c[$, La fonction $f_{v'} : v \mapsto v \oplus v'$ est continue en c .

Donc

$$\lim_{v \rightarrow c} V = \lim_{v \rightarrow c} f_{v'}(v) = f_{v'}(c) = \frac{c + v'}{1 + \frac{v'}{c}} = c$$

/1

La limite est indépendante de v' , elle vaut c .

Dans un tel modèle, la vitesse de la lumière n'est pas dépassable et ce modèle confirme les expériences de Michelson et Morley présentées en début d'énoncé.

Remarques !

Dans cet exercice, on voit une situation très fréquente aujourd'hui en science physique, (mais aussi en mathématiques) :

- un groupe $(\mathcal{G}, \oplus)$
- qui agit sur un ensemble $(E = \mathbb{R}^2)$
- par la transformation $\Phi : v \in \mathcal{G} \mapsto \varphi_v (\in \mathcal{F}(E, E))$

On parle d'action du groupe $\mathcal{G}$ sur l'ensemble E . (il faut que l'action vérifie : $\varphi_{e_{\mathcal{G}}} = \text{id}$ et $\varphi_{v \oplus v'} = \varphi_v \circ \varphi_{v'}$). En physique, on exploite les actions de groupes pour mieux comprendre les ensembles E . En mathématiques, on utilise plutôt les actions de groupes pour mieux comprendre les groupe en question (par l'étude de « représentants »)...

Exercice 2 - Démonstrations révisitées

/ ??

On considère f , une fonction définie sur $[a, b]$ et dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$.

1. Quelques théorèmes et définitions

(a)

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si $\forall a, b \in I$ avec $a < b$, on a $[a, b] \subset I$

/1

(b)

Théorème des valeurs intermédiaires :

Si f est continue sur $[a, b]$,

alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$) il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$,

De manière équivalente : si f est continue,

alors l'image par f de tout intervalle est un intervalle.

/1

(c)

Théorème de l'égalité des accroissements finis :

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$,

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$

/1

2. On considère deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de I convergentes toutes les deux vers un même nombre réel $\ell \in I$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq \ell \leq b_n$.

(a) Soit $\epsilon > 0$. Comme f est dérivable en $\ell \in I$, elle admet un $DL_1(\ell)$

$$\exists \epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\ell) + f'(\ell)(x - \ell) + \epsilon(x)(x - \ell) \quad \text{avec } \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow \ell} 0$$

$$\exists \epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(\ell) - f'(\ell)(x - \ell)| = |\epsilon(x)| |x - \ell| \quad \text{avec } \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow \ell} 0$$

Mais comme $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow \ell} 0$,

pour tout $\delta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]\ell - \eta, \ell + \eta[$, $|\epsilon(x)| \leq \delta$. Avec $\delta = \epsilon$:

/1,5

Il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in]\ell - \eta, \ell + \eta[\cap I$, $|f(x) - f(\ell) - (x - \ell)f'(\ell)| \leq \epsilon |x - \ell|$.

(b) Comme $(a_n) \rightarrow \ell$, il existe $N_1 > 0$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|a_n - \ell| \leq \eta$ et $a_n \in I$.

De même : $(b_n) \rightarrow \ell$, il existe $N_2 > 0$ tel que $\forall n \geq N_2$, $|b_n - \ell| \leq \eta$ et $b_n \in I$.

Puis pour tout $n > N = \max(N_1, N_2)$, $|a_n - \ell| \leq \eta$ et $|b_n - \ell| \leq \eta$ on a :

(comme $|b_n - \ell| = b_n - \ell$ et $|a_n - \ell| = \ell - a_n$) :

$$-\epsilon(b_n - \ell) \leq f(b_n) - f(\ell) - (b_n - \ell)f'(\ell) \leq \epsilon(b_n - \ell) \quad \text{et} \quad -\epsilon(\ell - a_n) \leq -\left(f(a_n) - f(\ell) - (a_n - \ell)f'(\ell)\right) \leq \epsilon(\ell - a_n)$$

En additionnant ces inégalités :

$$-\epsilon(b_n - \ell + \ell - a_n) \leq f(b_n) - f(a_n) - (b_n - a_n)f'(\ell) \leq \epsilon(b_n - \ell + \ell - a_n)$$

Donc, en divisant par $b_n - a_n > 0$:

$$\left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(\ell) \right| \leq \epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$,

/2,5

$\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right)_n$ converge et sa limite est $f'(\ell)$

3. On considère f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

(a) On note $h : [a, \frac{a+b}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$. On note également $M := \frac{1}{2}(f(b) - f(a))$

i. h est bien définie sur $[a, \frac{a+b}{2}]$.

Par composition, puis addition, h est continue sur $[a, \frac{a+b}{2}]$.

$$h(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \text{ et } h\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Puis, en remplaçant M par sa valeur :

$$\begin{aligned}(h(a) - M)(h(b) - M) &= \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) - M\right) \left(f(b) - M - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \\ &= - \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}(f(a) + f(b))\right)^2 \leq 0\end{aligned}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc t tel que $h(t) - M = 0$ /1,5

$$\boxed{\text{il existe } t \in [a, \frac{a+b}{2}] \text{ tel que } h(t) = M.}$$

ii. On prend alors $a' = t$ et $b' = t + \frac{b-a}{2}$.

Par définition : $b' - a' = \frac{b-a}{2}$ et $a \leq a' < b' \leq b$ (puisque $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$).

Puis

$$f(b') - f(a') = f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) - f(t) = h(t) = M = \frac{1}{2}(f(b) - f(a))$$

/1,5

$$\boxed{\text{On a donc deux nombres } a', b' \in [a, b] \text{ tels que : } b' - a' = \frac{1}{2}(b - a) \text{ et } f(b') - f(a') = \frac{1}{2}(f(b) - f(a))}$$

(b) Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}_n : \ll \exists a_n, b_n \in [a, b] \text{ tels que } b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a) \text{ et } f(b_n) - f(a_n) = \frac{1}{2^n}(f(b) - f(a)) \gg$$

— $\mathcal{P}_0$ est vraie avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

On applique alors à a_n et b_n , le résultat de la question précédente.

Il existe donc a'_n et b'_n tels que

— $a_n \leq a'_n < b'_n \leq b_n$

— $b'_n - a'_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

— $f(b'_n) - f(a'_n) = \frac{1}{2}(f(b_n) - f(a_n))$

On note alors $a_{n+1} = a'_n$ et $b_{n+1} = b'_n$, en exploitant $\mathcal{P}_n$:

— $a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n < b$.

— $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(b - a) = \frac{1}{2^{n+1}}(b - a)$

— $f(b_{n+1}) - f(a_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(f(b) - f(a)) = \frac{1}{2^{n+1}}(f(b) - f(a))$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée :

/2

$$\boxed{\text{Il existe deux suites adjacentes } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ telles que } \forall n \in \mathbb{N}, b_n > a_n \text{ et } f(b_n) - f(a_n) = \frac{1}{2^n}(f(b) - f(a))}.$$

(c) Les suites (a_n) et (b_n) adjacentes, donc convergentes vers ℓ vérifient exactement les hypothèses de la question 2.

$$\text{On a alors } f'(\ell) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}.$$

Or d'après la question précédente, pour tout entier n :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{\frac{1}{2^n}(f(b) - f(a))}{\frac{1}{2^n}(b - a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Cette suite est constante, donc sa limite lui est égale

/1,5

$$\boxed{f'(\ell) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

4. Nous montrons maintenant que f' vérifie, sans condition supplémentaire, la même conclusion que celle du théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire ici que $f'(I)$ est un intervalle.

(a) Pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f' directement, il faudrait que f' soit continue.

/1

$$\boxed{f \text{ est seulement dérivable, il aurait fallu que } f \text{ soit de classe } C^1.}$$

- (b) Soient $Y_1, Y_2 \in f'(I) = \{f'(x); x \in I\}$. On note x_1 (respectivement x_2) un nombre de I tel que $f'(x_1) = Y_1$ (resp. $f'(x_2) = Y_2$). On suppose que $Y_1 < Y_2$.
 Soit $Y \in]Y_1, Y_2[$. On note $h : t \mapsto f(t) - Yt$. Par addition, h est dérivable sur I .
 On a alors, pour tout $t \in I$, $h'(t) = f'(t) - Y$.
 Donc $h'(x_1) = Y_1 - Y < 0$ et $h'(x_2) = Y_2 - Y > 0$.
 On suppose (SPDG) que $x_1 > x_2$.
 h est continue, donc atteint sa borne supérieure sur $[x_1, x_2]$.
 Ainsi, il existe $c \in [x_1, x_2]$ tel que $\forall t \in [x_1, x_2], h(t) \leq h(c)$.
 Il y a alors trois possibilités : $c = x_1$, $c = x_2$ ou c est un point critique.
 Or $h'(x_2) > 0$, donc h est croissante au voisinage de x_2 et donc $c \neq x_2$.
 Or $h'(x_1) < 0$, donc h est décroissante au voisinage de x_1 et donc $c \neq x_1$. /2

il existe $c \in]x_2, x_1[$, point critique de h .

- (c) On a alors $h'(c) = 0 = f'(c) - Y$, donc $f'(c) = Y$. Ainsi $Y \in f'(I)$.
 On a alors $[Y_1, Y_2] \subset f'(I)$, qui est nécessairement un intervalle.
 Si $x_2 < x_1$, on considère alors le min de h et on retrouve l'existence de c point critique et la même conclusion. /1,5

Donc $f'(I)$ est un intervalle

Problème - Entropie

On considère dans l'ensemble du problème :

$$\begin{aligned} \varphi : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} -t \ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A. Etude de fonctions

1. Etude de φ .

- (a) Par produit de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}_+^*$, φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
 Par croissance comparée : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} -t \ln t = 0 = \varphi(0)$.
 Donc φ est également continue en 0. /1

φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- (b) Par produit de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, /0,5

φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

- (c) On a alors, pour tout $t > 0$, /1

$\varphi'(t) = -\ln t - 1 \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} +\infty$

- (d) La réponse à la question précédente ne donnant pas une limite finie, on ne peut en conclure rien concernant $\varphi'(0)$.
 En revanche, pour tout $t > 0$:

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \frac{-t \ln t - 0}{t} = -\ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} +\infty$$

Donc φ n'est pas dérivable en 0. /1

- (e) Pour $t > 0$, on a les équivalences :

$$\varphi'(t) > 0 \iff -\ln t - 1 > 0 \iff \ln t < -1 \iff t < \exp(-1) = \frac{1}{e}$$

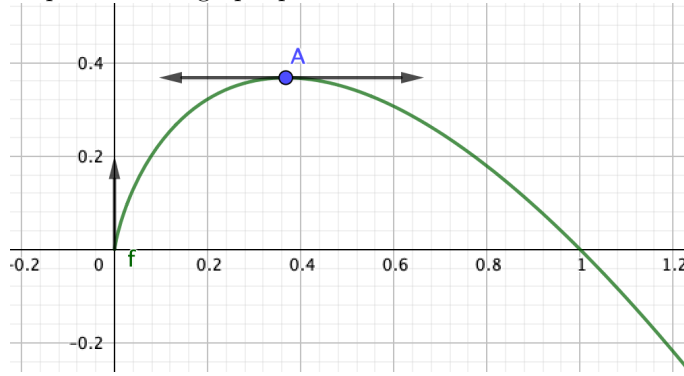
par croissance de la fonction exponentielle.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = -\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée), et $\varphi(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$,
 on a le tableau : /1,5

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	0
f	0	$\nearrow$	$\searrow$

Puis la représentation graphique :

/1



2. Famille de fonctions. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\varphi_k : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} -t^k \ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- (a) C'est le même argument que pour la question 1.(b), φ_k est le produit de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

/1

φ_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

- (b) On va appliquer le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Notons que pour tout $h \in \mathbb{N}$, $(t \mapsto t^k)^{(h)} = \begin{cases} (t \mapsto \frac{k!}{(k-h)!} t^{k-h}) & \text{si } h \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

/2

Et de même, pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, $(t \mapsto \ln t)^{(h)} = (t \mapsto \frac{(-1)^{h-1}(h-1)!}{t^h})$.

On montre ces résultats par récurrence notée $\mathcal{P}_n$ ($0 \leq n \leq k$) et $\mathcal{Q}_n$ ($n \geq 1$) respectivement.

— Comme : $\frac{k!}{(k-0)!} t^{k-0} = t^k$, alors $\mathcal{P}_0$ est vérifiée et $\frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{t^1} = \frac{1}{t}$ donc $\mathcal{Q}_1$ est vérifiée.

— Puis, pour $h < k$, si $\mathcal{P}_h$ est vraie alors $(t \mapsto t^k)^{(h)} = (t \mapsto \frac{k!}{(k-h)!} t^{k-h})$,

puis en dérivant une nouvelle fois :

$$(t \mapsto t^k)^{(h+1)} = (t \mapsto \frac{k!}{(k-h)!} t^{k-h-1}) = (t \mapsto \frac{k!}{(k-h-1)!} t^{k-h-1} = \frac{k!}{(k-(h+1))!} t^{k-(h+1)}) \text{ et}$$

si $h = k$: $(t \mapsto t^k)^{(k)} = k!$, de dérivée nulle. Ainsi l'hérédité est montrée pour la première fonction.

— Et pour la seconde, si $\mathcal{Q}_h$ est vraie,

$$\text{comme la dérivée de } (t \mapsto \frac{(-1)^{h-1}(h-1)!}{t^h}) \text{ est } (t \mapsto -\frac{(-1)^{h-1}(h-1)!ht^{h-1}}{t^{2h}} = (t \mapsto \frac{(-1)^h h!}{t^{h+1}}),$$

alors $\mathcal{Q}_{h+1}$ est vraie.

On applique maintenant la formule de LEIBNIZ pour $r \leq k-1$:

/1

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(r)}(t) &= \sum_{h=0}^{r-1} \binom{r}{h} \frac{k!}{(k-h)!} t^{k-h} \times \frac{(-1)^{r-h-1}(r-h-1)!}{t^{r-h}} + \frac{k!}{(k-r)!} t^{k-r} \ln t \\ &= \sum_{h=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r-h-1} r! k!}{(r-h) \times h! (k-h)!} t^{k-r} + \frac{k!}{(k-r)!} t^{k-r} \ln t \end{aligned}$$

Or comme $r \leq k-1$, alors $k-r > 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{k!}{(k-r)!} t^{k-r} \ln t = 0$. Par conséquent,

/1

pour tout $r \leq k-1$, $\varphi_k^{(r)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{}$ 0.

Par théorème de prolongement des limites : φ_k est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $[0, +\infty[$.

- (c) Avec la question précédente, on voit que pour tout $r = k-1$, $\varphi_k^{(k-1)}(0) = 0$.

Et précisément, pour $t > 0$:

$$\varphi_k^{(k-1)}(t) = \sum_{h=0}^{k-2} \frac{(-1)^{k-h-2}(k-1)!k!}{(k-1-h) \times h! (k-h)!} t^1 + \frac{k!}{1!} t^1 \ln t$$

Et donc

$$\frac{\varphi_k^{(k-1)}(t) - \varphi_k^{(k-1)}(0)}{t - 0} = \sum_{h=0}^{k-2} \frac{(-1)^{k-h-2} (k-1)! k!}{(k-1-h) \times h! (k-h)!} + k! \ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} +\infty$$

/2

φ_k n'est pas dérivable k fois en 0.

3. On suppose que $0 \leq a < b$.

Soit $h : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(a+t) + \varphi(b-t)$.

Il n'y a pas de problème de définition pour h , qui est dérivable sur $[0, b[$.

Pour tout $t \in [0, b[$:

/1

$$h'(t) = \varphi'(a+t) - \varphi'(b-t) = -\ln(a+t) + \ln(b-t)$$

☀ **Piste de recherche...**

☞ Si t est proche de 0, alors $b-t > a+t$, du moins, tant que $t < \frac{b-a}{2}$

On considère $\epsilon = \frac{b-a}{3} > 0$, pour tout $t \in [0, \epsilon]$:

/1

$$b-t \geq b-\epsilon = \frac{2b+a}{3} \underset{b>a}{>} \frac{b+2a}{3} = \epsilon + a \geq t + a$$

Donc pour tout $t \in [0, \epsilon]$, $h'(t) > 0$.

Donc h est croissante sur $[0, \epsilon]$, et donc $\forall t \in [0, \epsilon]$,

$$h(t) \geq h(0) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

/0,5

Il existe $\epsilon \in]0, b]$ tel que $\varphi(a+t) + \varphi(b-t) > \varphi(a) + \varphi(b)$ pour tout $t \in]0, \epsilon]$.

B. Continuité d'une fonction de plusieurs variables

On donne la définition de la continuité d'une fonction de plusieurs variables :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que $\psi : I \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) \in I$, si
 $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que : $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in I, \left(\forall i \in \mathbb{N}_p, |x_i - \bar{x}_i| \leq \eta \right) \implies |\psi(x) - \psi(\bar{x})| \leq \epsilon$

On fixe $N \geq 2$.

On note $\Sigma_N = \{(p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N p_i = 1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}_N, p_i \geq 0\}$.

On définit ensuite $H_N = \Sigma_N \rightarrow \mathbb{R}, (p_1, \dots, p_N) \mapsto \sum_{i=1}^N \varphi(p_i)$.

1. Soit $i \in \mathbb{N}_N$.

$p_i \geq 0$ par définition et $p_i = 1 - \sum_{j \neq i} p_j \leq 1$ car tout $j \neq i, p_j \geq 0$.

Donc pour tout $i \in \mathbb{N}_N, p_i \in [0, 1]$ et donc $\varphi(p_i) \geq 0$, d'après la première partie.

/1

Par addition : H_N est positive (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$).

2. $\varphi(\frac{1}{N}) = -\frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} = \frac{\ln N}{N}$.

Puis

/1

$$H_N(p) = \sum_{i=1}^N \frac{\ln N}{N} = \ln N$$

3. Soit $p = (p_1, \dots, p_N) \in \Sigma_N$.

Soit $\epsilon > 0$.

Soit $i \in \mathbb{N}_n$. φ est continue en p_i .

Donc il existe $\eta_i > 0$ tel que $\forall t \in]p_i - \eta_i, p_i + \eta_i[\cap \mathbb{R}_+, |\varphi(t) - \varphi(p_i)| \leq \frac{\epsilon}{N}$.

On note $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$. Alors pour tout $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \Sigma_N$,

/1,5

$$\begin{aligned} \left(\forall i \in \mathbb{N}_N, |x_i - p_i| \leq \eta \right) &\implies \left(\forall i \in \mathbb{N}_N, |x_i - p_i| \leq \eta_i \right) \implies \left(\forall i \in \mathbb{N}_N, |\varphi(x_i) - \varphi(p_i)| \leq \frac{\epsilon}{N} \right) \\ &\implies |H_N(x) - H_N(p)| = \left| \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) - \varphi(p_i) \right| \leq \sum_{i=1}^N |\varphi(x_i) - \varphi(p_i)| \leq N \times \frac{\epsilon}{N} = \epsilon \end{aligned}$$

H_N est continue en tout $p \in \Sigma_N$ (on dit que H_N est continue sur Σ_N).

4. Optimisation.

(a) Pour tout $p = (p_1, \dots, p_N) \in \Sigma_N$,

on a vu que pour tout $i \in \mathbb{N}_N$, $p_i \in [0, 1]$.

Et donc $\varphi(p_i) \in [0, \frac{1}{e}]$, d'après la première partie.

Ainsi $H(p) \leq \frac{N}{e}$

/1

Donc $H(\Sigma_N)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ majoré

(b) $H(\Sigma_N)$ admet donc une borne supérieure, noté M .

Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $y \in H(\Sigma_N)$ tel que $|y - M| \leq \epsilon$.

Et donc comme $y \in H(\Sigma_N)$, il existe $p \in \Sigma_N$ tel que $y = H(p)$.

En prenant $\epsilon = \frac{1}{n}$ et en notant p^n , le terme correspondant, on trouve

/1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p^n = (p_1^n, p_2^n, \dots, p_N^n) \in \Sigma_N$ tel que $|H(p^n) - M| < \frac{1}{n}$.

(c) On a donc défini une suite (p^n) , plus précisément N suites $(p_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (pour $i \in \mathbb{N}_N$).

Chacune de ces suites est bornée puisque $p_i^n \in [0, 1]$.

Il existe donc $\psi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $(p_1^{\psi_1(n)})_n$ converge d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Puis, il existe $\psi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(p_2^{\psi_1(\psi_2(n))})_n$ converge.

Et ainsi de suite(...), il existe pour tout $i \in \mathbb{N}_N$, $\psi_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(p_i^{\psi_1 \circ \dots \circ \psi_i(n)})_n$ converge.

On note $\Psi = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_N$, alors pour tout i , $(p_i^{\Psi(n)})_n$ converge.

Notons $p = (\lim p_1^{\Psi(n)}, \lim p_2^{\Psi(n)}, \dots, \lim p_N^{\Psi(n)})$.

/1

On a par continuité de φ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 = \sum_{i=1}^N \varphi(p_i^{\Psi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H_N(p)$$

Donc $H_n(p) \in \Sigma_N$.

/1

Et par continuité de H , $H(p) = \lim H(p_n) = M$.

/1

Il existe donc $\bar{p} \in \Sigma_N$ tel que $H(\bar{p}) = \sup\{H(p), p \in \Sigma_N\}$.

5. On suppose que $\bar{p} \neq (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$.

(a) Si pour tout $i \in \mathbb{N}_N$, $\bar{p}_i = \bar{p}_1$, alors $1 = \sum_{i=1}^N \bar{p}_i = N\bar{p}_1$, donc $\bar{p}_i = \frac{1}{N}$.

Donc comme $\bar{p} \neq (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$, nécessairement il existe i, j tel que $\bar{p}_i \neq \bar{p}_j$.

Quitte à inverser les noms, on peut supposer que $\bar{p}_i < \bar{p}_j$.

/0,5

il existe $i, j \in \mathbb{N}_N$ tel que $\bar{p}_i < \bar{p}_j$

Puis d'après l'inégalité (I) de la fin de la première partie :

/1

il existe $\epsilon > 0$ tels que : $\forall t \in]0, \epsilon]$, $\varphi(\bar{p}_i + t) + \varphi(\bar{p}_j - t) > \varphi(\bar{p}_i) + \varphi(\bar{p}_j)$.

(b) Soit $t \in]0, \epsilon]$. Si on considère alors $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_N)$, tel que :

- $\forall k \notin \{i, j\}$, $\bar{q}_k = \bar{p}_k$
- $\bar{q}_i = \bar{p}_i + t$
- $\bar{q}_j = \bar{p}_j - t$.

Alors $\sum_{h=1}^N \bar{q}_h = \sum_{h=1}^N \bar{p}_h + t - t = 1$, donc $\bar{q} \in \Sigma_N$.

Et :

$$H_N(\bar{q}) = \sum_{h=1}^N \varphi(\bar{q}_h) = \left(\sum_{h=1, h \notin \{i, j\}}^N \varphi(\bar{p}_h) \right) + \varphi(\bar{p}_i + t) + \varphi(\bar{p}_j - t) > \left(\sum_{h=1, h \notin \{i, j\}}^N \varphi(\bar{p}_h) \right) + \varphi(\bar{p}_i) + \varphi(\bar{p}_j) = H_N(\bar{p})$$

Ce qui est contradictoire. Donc $\bar{p} = (\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$.

Et finalement :

$$\text{pour tout } p \in \Sigma_N, H_N(p) \leq H_N(\bar{p}) = \ln N.$$

/1,5