MPSI 3 - Fermat 07.01.20
2019-2020

Devoir à la maison n°6
CORRECTION

Exercice 1

— On pose $u = x - \frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned}
\tan x &= \tan(u + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\tan u + 1}{1 - \tan u} \underset{u\to 0}{=} \frac{1 + u + o(u^2)}{1 - u + o(u^2))} = (1 + u + o(u^2))(1 + u + u^2 + o(u^2)) \\
&\underset{u\to 0}{=} 1 + 2u + 2u^2 + o(u^2) \\
\exp(\tan x) &\underset{u\to 0}{=} e \times \exp(2u + 2u^2 + o(u^2)) = e(1 + 2u + 2u^2 + \tfrac{4u^2}{2} + o(u^2)) \\
&\underset{u\to 0}{=} e(1 + 2u + 4u^2 + o(u^2)) \\
\sin 2x &= \sin(2u + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(2u) \underset{u\to 0}{=} 1 - \tfrac{1}{2}u^2 + o(u^2) \\
\exp(\sin(2x)) &\underset{u\to 0}{=} e(1 - \tfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)) \\
\exp(\tan x) - \exp(\sin(2x)) &\underset{u\to 0}{=} 2eu + o(u) \\
\ln(\tan(x)) &\underset{u\to 0}{=} \ln(1 + 2u + o(u)) = 2u + o(u)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin(2x)}}{\ln(\tan(x))} = e}$$

Remarques !
Un DL à l'ordre 1 aurait suffit

— On a :

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right)^{1/n} &= \exp\left(\tfrac{1}{n}\ln\left(x^n\prod_{k=1}^{n}(1+\tfrac{k}{x})\right)\right) = \exp\left(\ln x + \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{x})\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x \times \exp\left(\tfrac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}\tfrac{k}{x} + o(\tfrac{1}{x}))\right) = x \times \exp(\tfrac{n+1}{2x} + o(\tfrac{1}{x})) \\
\left(\left(\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right)^{1/n} - x\right) &\underset{x\to+\infty}{=} x \times \left(\exp(\tfrac{n+1}{2x} + o(\tfrac{1}{x})) - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\frac{n}{2x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right)^{1/n} - x\right) = \frac{n}{2}}$$

— Soit $f : x \mapsto e^{\sqrt[10]{x^{10}+1}} - e^{\sqrt[10]{x^{10}-1}}$.
On commence par le cas $a = +\infty$, plus simple.

$$f(x) = \exp\left(x\left(1+\frac{1}{x^{10}}\right)^{1/10}\right) - \exp\left(x\left(1-\frac{1}{x^{10}}\right)^{1/10}\right)$$

Or au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\left(x\left(1+\tfrac{1}{x^{10}}\right)^{1/10}\right) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + \tfrac{1}{10}\tfrac{1}{x^{10}} - \tfrac{9}{200}\tfrac{1}{x^{20}} + \tfrac{57}{2000}\tfrac{1}{x^{30}} + o(\tfrac{1}{x^{30}})\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x + \tfrac{1}{10}\tfrac{1}{x^9} - \tfrac{9}{200}\tfrac{1}{x^{19}} + \tfrac{57}{2000}\tfrac{1}{x^{29}} + o(\tfrac{1}{x^{29}}) \\
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} e^x\left(\exp\left(\tfrac{1}{10}\tfrac{1}{x^9} - \tfrac{9}{200}\tfrac{1}{x^{19}} + \tfrac{57}{2000}\tfrac{1}{x^{29}} + o(\tfrac{1}{x^{29}})\right) - \exp\left(-\tfrac{1}{10}\tfrac{1}{x^9} - \tfrac{9}{200}\tfrac{1}{x^{19}} - \tfrac{57}{2000}\tfrac{1}{x^{29}} + o(\tfrac{1}{x^{29}})\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} e^x\Big(1 + \left(\tfrac{1}{10}\tfrac{1}{x^9} - \tfrac{9}{200}\tfrac{1}{x^{19}} + \tfrac{57}{2000}\tfrac{1}{x^{29}}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{10}\tfrac{1}{x^9} - \tfrac{9}{200}\tfrac{1}{x^{19}}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{10}\tfrac{1}{x^9}\right)^3 \\
&\qquad -1 - \left(-\tfrac{1}{10}\tfrac{1}{x^9} - \tfrac{9}{200}\tfrac{1}{x^{19}} - \tfrac{57}{2000}\tfrac{1}{x^{29}}\right) - \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{10}\tfrac{1}{x^9} - \tfrac{9}{200}\tfrac{1}{x^{19}}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{-1}{10}\tfrac{1}{x^9}\right)^3 + o(\tfrac{1}{x^{28}})\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} e^x\left(\frac{1}{5}\frac{1}{x^9} + \frac{1}{3000}\frac{1}{x^{27}} - \frac{9}{1000}\frac{1}{x^{28}} + o(\frac{1}{x^{28}})\right)}$$

On note $a > 1$ et on considère $x = a + h$, avec h proche de 0.

$$f(a+h) = e^{\sqrt[10]{(a+h)^{10}+1}} - e^{\sqrt[10]{(a+h)^{10}-1}} = e^{a\sqrt[10]{(1+\frac{h}{a})^{10}+\frac{1}{a^{10}}}} - e^{a\sqrt[10]{(1+\frac{h}{a})^{10}-\frac{1}{a^{10}}}}$$

Or en notant $\alpha_+ = 1 + \frac{1}{a^{10}}$,

$$\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{h}{a}\right)^{10} + \tfrac{1}{a^{10}} &\underset{h\to 0}{=} \left(1+\tfrac{1}{a^{10}}\right) + \tfrac{10}{a}h + \tfrac{45}{a^2}h^2 + \tfrac{120}{a^3}h^3 + +o(h^3) \\
&\underset{h\to 0}{=} \alpha_+\left(1 + \tfrac{10}{\alpha_+ a}h + \tfrac{45}{\alpha_+ a^2}h^2 + \tfrac{120}{\alpha_+ a^3}h^3 + o(h^3)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\sqrt[10]{\left(1+\tfrac{h}{a}\right)^{10} + \tfrac{1}{a^{10}}} &\underset{h\to 0}{=} a\sqrt[10]{\alpha_+}\left(1 + \tfrac{10}{\alpha_+ a}h + \tfrac{45}{\alpha_+ a^2}h^2 + \tfrac{120}{\alpha_+ a^3}h^3 + o(h^3)\right)^{1/10} \\
&\underset{h\to 0}{=} a\sqrt[10]{\alpha_+}\left(1 + \tfrac{1}{10}\left(\tfrac{10}{\alpha_+ a}h + \tfrac{45}{\alpha_+ a^2}h^2 + \tfrac{120}{\alpha_+ a^3}h^3\right) - \tfrac{9}{200}\left(\tfrac{10}{\alpha_+ a}h + \tfrac{45}{\alpha_+ a^2}h^2\right)^2 + \tfrac{57}{2\,000}\left(\tfrac{10}{\alpha_+ a}h\right)^3 + o(h^3)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} a\sqrt[10]{\alpha_+}\left(1 + \tfrac{1}{\alpha_+ a}h + \tfrac{9}{2\alpha_+^2 a^2}(\alpha_+ - 1)h^2 + \tfrac{1}{2\alpha_+^3 a^3}(24\alpha_+^2 - 81\alpha_+ + 57)h^3 + o(h^3)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{a\sqrt[10]{(1+\frac{h}{a})^{10}+\frac{1}{a^{10}}}} &\underset{h\to 0}{=} e^{a\sqrt[10]{\alpha_+}} \times \exp\left(\tfrac{1}{\alpha_+^{9/10}}h + \tfrac{9}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{19/20}a}(\alpha_+ - 1)h^2 + \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{29/30}a^2}(8\alpha_+^2 - 27\alpha_+ + 19)h^3 + o(h^3)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} e^{a\sqrt[10]{\alpha_+}} \times \left(1 + \left(\tfrac{1}{\alpha_+^{9/10}}h + \tfrac{9}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{19/20}a}(\alpha_+ - 1)h^2 + \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{29/30}a^2}(8\alpha_+^2 - 27\alpha_+ + 19)h^3\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\alpha_+^{9/10}}h + \tfrac{9}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{19/20}a}(\alpha_+ - 1)h^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\tfrac{1}{\alpha_+^{9/10}}h\right)^3 + o(h^3)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} e^{a\sqrt[10]{\alpha_+}} \times \left(1 + \tfrac{1}{\alpha_+^{9/10}}h + \left(\tfrac{9}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{19/20}a^{11}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{18/10}}\right)h^2\right. \\
&\qquad \left. + \left(\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{29/30}}\left(-\tfrac{39}{a^{12}} + \tfrac{24}{a^{22}}\right) + \tfrac{9}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{28/30}a^{11}} + \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{\alpha_+^{27/30}}\right)h^3 + o(h^3)\right)
\end{aligned}$$

car $\alpha_+ - 1 = \frac{1}{a^{10}}$ et donc $(24\alpha_+^2 - 81\alpha_+ + 57) = -\frac{39}{a^{10}} + \frac{24}{a^{20}}$.
De même, en notant $\alpha_- = 1 - \frac{1}{a^{10}}$,

$$\begin{aligned}
e^{a\sqrt[10]{(1+\frac{h}{a})^{10}-\frac{1}{a^{10}}}} &\underset{h\to 0}{=} e^{a\sqrt[10]{\alpha_-}} \times \left(1 + \tfrac{1}{\alpha_-^{9/10}}h + \left(\tfrac{-9}{2}\tfrac{1}{\alpha_-^{19/20}a^{11}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\alpha_-^{18/10}}\right)h^2\right. \\
&\qquad \left. + \left(\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{\alpha_-^{29/30}}\left(\tfrac{39}{a^{12}} + \tfrac{24}{a^{22}}\right) + \tfrac{9}{2}\tfrac{1}{\alpha_-^{28/30}a^{11}} + \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{\alpha_-^{27/30}}\right)h^3 + o(h^3)\right)
\end{aligned}$$

Et magnifiquement (en gardant les mêmes conventions de notation) :

$$\boxed{\begin{aligned}
f(a+h) \underset{h\to 0}{=}\ & \left[e^{a\sqrt[10]{\alpha_+}} - e^{a\sqrt[10]{\alpha_-}}\right] + h\left[\tfrac{1}{\alpha_+^{9/10}}e^{a\sqrt[10]{\alpha_-}} - \tfrac{1}{\alpha_-^{9/10}}e^{a\sqrt[10]{\alpha_-}}\right] \\
& + h^2\left[e^{a\sqrt[10]{\alpha_+}}\left(\tfrac{9}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{19/20}a^{11}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{18/10}}\right) - e^{a\sqrt[10]{\alpha_-}}\left(\tfrac{-9}{2}\tfrac{1}{\alpha_-^{19/20}a^{11}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\alpha_-^{18/10}}\right)\right] \\
& + h^3\left[e^{a\sqrt[10]{\alpha_+}}\left(\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{29/30}}\left(\tfrac{-39}{a^{12}} + \tfrac{24}{a^{22}}\right) + \tfrac{9}{2}\tfrac{1}{\alpha_+^{28/30}a^{11}} + \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{\alpha_+^{27/30}}\right)\right. \\
& \qquad \left. e^{a\sqrt[10]{\alpha_-}}\left(\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{\alpha_-^{29/30}}\left(\tfrac{39}{a^{12}} + \tfrac{24}{a^{22}}\right) - \tfrac{9}{2}\tfrac{1}{\alpha_-^{28/30}a^{11}} + \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{\alpha_-^{27/30}}\right)\right] + o(h^3)
\end{aligned}}$$

Problème

I. Sommes des puissances des racines

Soit Q un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$: $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

On note $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ses racines complexes, distinctes ou non et on a donc : $Q(X) = b_n \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $T_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$ et $T_0 = n$.

L'objectif est de calculer les termes de la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir des coefficients du polynôme Q.

1. C'est un résultat de cours, qui s'obtient par télescopage.
   Soit $m \geqslant 1$, (en posant $h = k+1$) :

$$\begin{aligned}(X-a)\left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k X^{m-1-k}\right) &= \sum_{k=0}^{m-1} a^k X^{m-k} - \sum_{k=0}^{m-1} a^{k+1} X^{m-1-k} \\ &= X^m + \sum_{k=1}^{m-1} a_k X^{m-k} - \sum_{h=1}^{m-1} a_h X^{m-h} - a^m\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in \mathbb{C}, \text{ et tout entier naturel } m \geqslant 1,\ X^m - a^m = (X-a)\left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k X^{m-1-k}\right).}$$

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note Q_i le polynôme défini par :

$$Q_i(X) = \frac{Q(X)}{X-\alpha_i} = \frac{b_n \prod_{j=1}^{n}(X-\alpha_j)}{X-\alpha_i} = b_n \prod_{j \neq i}(X-\alpha_j)$$

   La formule de dérivation d'un produit donne :

$$\boxed{Q' = b_n \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}(X-\alpha_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} Q_i}$$

3. Comme $Q(\alpha_i) = 0$, on a bien $Q_i(X) = \dfrac{Q(X) - Q(\alpha_i)}{X-\alpha_i}$.
   Or, par linéarité (les termes en $k = 0$ s'annulent) :

$$Q(X) - Q(\alpha_i) = \sum_{s=1}^{n} b_s(X^s - \alpha_i^s) = \sum_{s=1}^{n} b_s (X-\alpha_i)\left(\sum_{k=0}^{s-1} \alpha_i^k X^{s-1-k}\right)$$

   d'après la première réponse.
   On trouve donc

$$Q_i = \frac{Q - Q(\alpha_i)}{X-\alpha_i} = \sum_{0 \leqslant k < s \leqslant n} b_s \alpha_i^k X^{s-1-k}$$

   Puis en faisant le changement de variable $r = s-k$ (k remplacé par r), on a

$$0 \leqslant s-r < s \leqslant n \iff s \in [\![1,n]\!], r \in [\![1,s]\!] \iff 1 \leqslant r \leqslant s \leqslant n$$

   Donc

$$\boxed{Q_i = \sum_{1\leqslant r \leqslant s \leqslant n} b_s \alpha_i^{s-r} X^{r-1} = \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{s=r}^{n} b_s \alpha_i^{s-r}\right) X^{r-1}}$$

4. Donc on trouve :

$$Q' = \sum_{r=1}^{n} r b_r X^{r-1} = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=r}^{n} b_s \alpha_i^{s-r}\right) X^{r-1}$$

   L'écriture sur la base $(1, X, \ldots X^{n-1})$ est unique, donc

$$\forall\ r \in \mathbb{N}_n, \qquad r b_r = \sum_{s=r}^{n} b_s \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{s-r}\right) = \sum_{s=r}^{n} b_s T_{s-r}$$

   Reste à faire le changement de variable $j = s - r$:

$$\boxed{\forall r \in [\![1,n]\!], \qquad r b_r = b_n \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j} T_j}$$

Remarques !

On notera que $T_0 = n$ est bien un prolongement en $k=0$ de la formule $T_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$,

car dans ce cas $T_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

5. On a donc trouvé donc une relation de récurrence triangulaire entre les T_k :

$$rb_r = (b_r T_0 + b_{r+1}T_1 + \cdots + b_n T_{n-r})$$

Donc $T_{n-r} = \dfrac{1}{b_n}(rb_r - b_r T_0 - b_{r+1}T_1 - \cdots - b_{n-1}T_{n-r-1})$.
En notant k, le nombre $n-r$:

$$\boxed{\text{Pour } k \in [\![1, n-1]\!], \qquad T_k = \frac{1}{b_n}(rb_r - b_r T_0 - b_{r+1}T_1 - \cdots - b_{r+k-1}T_{k-1}).}$$

6. Soit $k \geqslant n$.

(a) On sait que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $Q(\alpha_i) = 0$, donc $\sum_{h=0}^{n} b_h \alpha_i^h = 0$.
On multiplie par α_i^{k-n}, puis on additionne pour i de 1 à n :

$$\boxed{0 = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i^{k-n}\sum_{h=0}^{n} b_h \alpha_i^h\right) = \sum_{h=0}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_h \alpha_i^{k+h-n} = \sum_{h=0}^{n} b_h T_{k-n+h}}$$

(b) Comme pour la question 5, on trouve

$$b_0 T_{k-n} + b_1 T_{k-n+1} + \cdots + b_n T_k$$

$$\boxed{T_k = \frac{-1}{b_n}(b_0 T_{k-n} + b_1 T_{k-n+1} + \cdots + b_{n-1}T_{k-1}) = \frac{-1}{b_n}\sum_{j=k-n}^{k-1} b_{j-k+n}T_j}$$

II. Polynômes cyclotomiques

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une racine n-ième de l'unité z est primitive si $z^d \neq 1$, pour tout entier $d \in [\![1, n-1]\!]$.
On note $\mathbb{P}_n$, l'ensemble des racines primitives n-ième de l'unité.
On a donc $\mathbb{P}_1 = \{1\}$, $\mathbb{P}_2 = \{-1\}$ et $\mathbb{P}_3 = \{j, j^2\}$.
On définit $\Phi_n \in \mathbb{C}[X]$ par

$$\Phi_n = \prod_{z \in \mathbb{P}_n}(X - z)$$

1. Les racines 4-ième de l'unité sont $1, -1, i, -i$. Seules les deux dernières sont primitives.
Donc $\mathbb{P}_4 = \{i, -i\}$ et ainsi

$$\boxed{\Phi_4 = (X-i)(X+i) = X^2 + 1}$$

Remarques !

On a aussi $\Phi_1 = X - 1$, $\Phi_2 = X + 1$ et $\Phi_3 = (X-j)(X-j^2) = X^2 + X + 1$.
Ce sont des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. Est-ce vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

2. On note $\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$, l'ensemble des racines n-ième de l'unité. On sait que

$$X^n - 1 = \prod_{z \in \mathbb{U}_n}(X - z)$$

On va montrer que $\mathbb{U}_n = \bigcup_{d|n} \mathbb{P}_d$, réunion disjointe, ce qui permettra de conclure.
On notera pour la suite du devoir, pour tout entier d : $\omega_d = e^{i\frac{2\pi}{d}}$.
Notons d'abord les équivalences :
z est une racine primitive n-ieme (i.e $z \in \mathbb{P}_d$)

$\iff \exists\, k \in [\![0, d-1]\!]$ tel que $z = e^{i\frac{2k\pi}{d}}$ (racine n-ieme) et $\forall\, t \in [\![1, d-1]\!]$, $z^t \neq 1$ (primitive).
$\iff \exists\, k \in [\![0, d-1]\!]$ tel que $z = e^{i\frac{2k\pi}{d}}$ et $\forall\, t \in [\![1, d-1]\!]$, $tk \not\equiv 0[n]$.
Avec ces notations, on note $\delta = k \wedge d$, puis $d' = \frac{d}{\delta}$ et $k' = \frac{k}{\delta}$. On a alors $d'k = d'\delta k' = dk'$.
Donc $d|d'k$ et donc $d'k \equiv 0[n]$.
On a donc l'équivalence

$$\boxed{z \in \mathbb{P}_d \iff \exists\, k \in [\![0, d-1]\!] \text{ tel que } k \wedge d = 1 \text{ et } z = (\omega_d)^k}$$

On a alors (réunion disjointe, nécessairement et toujours avec la même notation) :

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_n &= \{\omega_n^k; k \in [\![1, n]\!]\} = \bigcup_{d|n} \{\omega_n^k; k \in \mathbb{N}_n \text{ et } k \wedge n = d\} = \bigcup_{d|n} \{\omega_{n'}^{k'}; k' \in \mathbb{N}_{n'} \text{ et } k'd = k, n'd = n, k' \wedge n' = 1\} \\ &= \bigcup_{n'd=n} \{\omega_{n'}^{k'}; k' \in \mathbb{N}_{n'} \text{ et } k' \wedge n' = 1\} = \bigcup_{n'|n} \mathbb{P}_{n'}\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{X^n - 1 = \prod_{z \in \mathbb{U}_n} (X - z) = \prod_{d|n} \left(\prod_{z \in \mathbb{P}_d} (X - z) \right) = \prod_{d|n} \Phi_d}$$

Puis, comme $\mathrm{card}(\mathbb{P}_n) = \varphi(n)$ (nombre de nombres de 1 à n premiers avec n) ;
et que le degré du produit de polynômes est la somme des degrés des polynômes :

$$\boxed{n = \deg(X^n - 1) = \sum_{d|n} \deg(\Phi_d) = \sum_{d|n} \deg \left(\prod_{z \in \mathbb{P}_d} (X - z) \right) = \sum_{d|n} \left(\sum_{z \in \mathbb{P}_d} 1 \right) = \sum_{d|n} \mathrm{card}(\mathbb{P}_d) = \sum_{d|n} \varphi(d)}$$

3. (a) Soit p un nombre premier

$$\Phi_{p^k} = \{\omega_{p^k}^r; r \in \mathbb{N}_{p^k} \text{ et } r \wedge p^k = 1\} = \{\omega_{p^k}^r; r \in \mathbb{N}_{p^k} \text{ et } r \wedge p = 1\} = \left\{\omega_{p^k}^r; r \in \mathbb{N}_{p^k} \backslash \{p, 2p, 3p, \dots p^{k-1}p\}\right\}$$

On a alors

$$X^{p^k} - 1 = \prod_{z \in \mathbb{U}_{p^k}} (X - z) = \left(\prod_{r \in \{p, 2p, \dots (p^{k-1})p\}} (X - \omega_{p^k}^r) \right) \times \Phi_{p^k} = \left(\prod_{j=1}^{p^{k-1}} (X - \omega_{p^k}^{jp}) \right) \times \Phi_{p^k}$$

Or $\omega_{p^k}^p = \exp\left(i\frac{2p\pi}{p^k}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{p^{k-1}}\right) = \omega_{p^{k-1}}$.

$$\prod_{j=1}^{p^{k-1}} (X - \omega_{p^k}^{jp}) = \prod_{j=1}^{p^{k-1}} \left(X - \left(\omega_{p^k}^p\right)^j \right) = \prod_{j=1}^{p^{k-1}} \left(X - \left(\omega_{p^{k-1}}\right)^j \right) = \prod_{z \in \mathbb{U}_{p^{k-1}}} (X - z) = X^{p^{k-1}} - 1$$

Par ailleurs, on a le telescopage :

$$(X^{(p-1)p^{k-1}} + X^{(p-2)p^{k-1}} + \cdots + X^{p^{k-1}} + 1)(X^{p^{k-1}} - 1) = X^{(p-1)p^{k-1} + p^{k-1}} - 1 = X^{p^k} - 1$$

On fait la division par $X^{p^{k-1}} - 1 = \prod_{j=1}^{p^{k-1}} (X - \omega_{p^k}^{jp})$.

$$\boxed{\Phi_{p^k} = X^{(p-1)p^{k-1}} + X^{(p-2)p^{k-1}} + \cdots + X^{p^{k-1}} + 1}$$

(b) Comme 5 est un nombre premier, tous les nombres $k \in [\![1; 4]\!]$ sont premiers avec 5.
Donc $\Phi_5 \times (X - 1) = X^5 - 1$, donc

$$\boxed{\Phi_5 = \frac{X^5 - 1}{X - 1} = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4}$$

$\mathbb{P}_6 = \{\omega^6, \omega_6^5\}$.
Donc, comme $\omega_6^5 = \overline{\omega_6} = \cos\frac{2\pi}{6} - i \sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\boxed{\Phi_6 = (X - \omega_6)(X - \omega_6^5) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\omega_6) + |\omega_6|^2 = X^2 - X + 1}$$

Remarques !
On peut vérifier que

$$\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_6 = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) = (X^2-1)(X^4+X^2+1) = X^6-1$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
D'après le lemme d'Euclide : $k \wedge n = (n-k) \wedge k$, donc $k \wedge n = 1 \Longleftrightarrow (n-k) \wedge n = 1$.

$$\omega_n^k \in \mathbb{P}_n \Longleftrightarrow \overline{\omega_n^k} = \omega_n^{n-k} \in \mathbb{P}_n$$

On peut donc séparer en deux les racines n-ieme primitive selon le signe de leur partie imaginaire : *Pour $n \geqslant 1$, ni 1, ni -1 ne sont racines n-ième primitive!!*

$$\Phi_n = \prod_{z\in\mathbb{P}_n, \mathrm{Im}(z)>0} (X-z)(X-\overline{z}) = \prod_{z\in\mathbb{P}_n, \mathrm{Im}(z)>0} (X^2 - \mathrm{Re}(z)X + |z|^2)$$

Or si z est une racine n-ième, $|z|^2 = 1$.
En prenant la valeur en 0

$$\boxed{\Phi_n(0) = \prod_{z\in\mathbb{P}_n; \mathrm{Im}(z)>0} 1 = 1}$$

(b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$\mathcal{H}_n : \ll \ \Phi_n(1) = \begin{cases} p & \text{si } n = p^r, \text{ avec } p \text{ nombre premier} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \gg$$

— $\Phi_2(1) = 1+1 = 2$. Donc $\mathcal{H}_2$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on suppose que $\mathcal{H}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![2, n]\!]$.
Si $n+1 = p^k$,
avec la question 3.(a), on voit que $\Phi_{p^k}(1) = (p-1)1 + 1 = p$.
Supposons que $n+1 = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ avec $r \geqslant 2$.

$$X^{n+1} - 1 = (X-1) \times \left(\prod_{k|n+1, k\notin\{1,n+1\}} \Phi_k \right) \times \Phi_{n+1}$$

Donc

$$\left(\prod_{k|n+1, k\notin\{1,n+1\}} \Phi_k \right) \times \Phi_{n+1} = \frac{X^{n+1}-1}{X-1} = \sum_{k=0}^{n} X^k$$

En regardant en 1 comme $\mathcal{H}_r$ est vraie,
et que pour beaucoup de diviseurs d de $n+1$, $\Phi_d(1) = 1$:

$$\Phi_{n+1}(1) \times \left(\Phi_{p_1}(1)\Phi_{p_1^2}(1)\dots\Phi_{p_1^{\alpha_1}}(1)\right) \times \dots \times \left(\Phi_{p_r}(1)\dots\Phi_{p_r^{\alpha_r}}(1)\right) \times 1 = n+1$$

$$\Phi_{n+1}(1) \times p_1^{\alpha_1} \times \dots p_r^{\alpha_r} = \Phi_{n+1}(1) \times (n+1) = (n+1)$$

Donc $\Phi_{n+1}(1) = 1$.
Ainsi, tous les cas sont vérifiées : $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
La récurrence est démontrée :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2,\ \Phi_n(1) = \begin{cases} p & \text{si } n = p^r, \text{ avec } p \text{ nombre premier} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

III. Polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ à racines de module 1

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 1$, irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et dont tous les racines complexes sont de module 1.
L'objectif est de montrer que toutes les racines de P sont alors des racines de l'unité. Soient $z_1, \dots z_n$ les racines complexes de P comptées avec leurs multiplicités, de sorte que

$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - z_i)$$

Pour tout entier k, $S_k = z_1^k + z_2^k + \dots + z_n^k$.

1. On démontre le résultat par récurrence forte sur k.
   Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$: « $S_k \in \mathbb{Z}$ ».
   — $S_0 = n \in \mathbb{N}$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   — Non nécessaire : $S_1 = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -[P]_{n-1} \in \mathbb{Z}$.
   Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \geqslant n$, $S_k \in \mathbb{Z}$.
   En première partie on a vu que $[P]_n S_{n+1}$ est une combinaison linéaire de la forme produit de $[P]_k$ par S_h $(h < n+1)$.
   Or $[P]_k \in \mathbb{Z}$, car $P \in \mathbb{Z}[X]$, $S_h \in \mathbb{Z}$, par hypothèse de récurrence.
   Donc $[P]_n S_{n+1} \in \mathbb{Z}$. Et comme P est unitaire, $[P]_n = 1$ et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
   $\boxed{\text{Donc pour tout entier } k \in \mathbb{N},\ S_k \in \mathbb{Z}.}$

2. Comme pour tout $i \in \mathbb{N}$, $|z_i| \in 1$, alors

$$|S_k| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|^k \leqslant \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

   Donc $S_k \in [\![-n, n]\!]$.
   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(S_k, S_{k+1}, \dots S_{k+n}) \in [\![-n, n]\!]^{n+1}$$

   Or l'ensemble $[\![-n, n]\!]^{n+1}$ est fini (il possède au plus $(2n+1)^{n+1}$ nombres - n est fixé !).
   Donc nécessairement, il existe $k \neq \ell \in \mathbb{N}$ tel que $(S_k, S_{k+1}, \dots S_{k+n}) = (S_\ell, S_{\ell+1}, \dots S_{\ell+n})$

$$\boxed{\text{Il existe deux entiers } k \text{ et } \ell\ (0 \leqslant k < \ell) \text{ tels que } S_{k+i} = S_{\ell+i} \text{ pour tout } i \in \{0, 1, \dots n\}.}$$

On fixe k et ℓ.

3. Soit $F \in \mathbb{C}_n[X]$, on peut supposer que $F = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ (avec $d \leqslant n$).

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} F(z_i)(z_i^\ell - z_i^k) = \sum_{j=0}^{d} a_j \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\ell+j} - \sum_{i=1}^{n} z_i^{k+j} \right) = \sum_{j=0}^{d} a_j (S_{\ell+j} - S_{k+j}) = 0}$$

4. On a déjà fait cette première question d'un DS1 mais elle n'est pas facile.
   On note pour α, l'une des racines z_i de P,

$$\mathcal{I}_\alpha = \{T \in \mathbb{Q}[X] \mid T(\alpha) = 0\}$$

   $\mathcal{I}_\alpha$ est non vide, puis $P \in \mathcal{I}_\alpha$. L'ensemble $\{\deg P, P \in \mathcal{I}_\alpha, P \neq 0\}$ est non vide.
   On note $r = \min\{\deg P, P \in \mathcal{I}_\alpha\}$ et $T_r \in \mathcal{I}_\alpha$ tel que $\deg T_r = r$.
   On peut faire la division euclidienne de P par T_r, dans le corps de base :

$$P = T_r Q + R$$

   Ainsi $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$ et $R(\alpha) = P(\alpha) - Q(\alpha) T_r(\alpha) = 0$.
   Donc $R \in \mathcal{I}_\alpha$, et $\deg R < \deg Q$. La seule possibilité est $R = 0$, sinon on a une contradiction.
   Donc T_r divise P. Mais par hypothèse, P est irréductible donc $P = T_r$.
   Puis
   Si α est une racine double de P, alors α est aussi une racine de P'.
   P', comme P est un polynôme à coefficients entiers.
   Donc $P' \in \mathcal{I}_\alpha$, avec $\deg P' < r$. Impossible.

$$\boxed{\text{Ainsi toutes les racines de } P \text{ sont distinctes (aucune n'est double)}}$$

   On a donc en prenant $F = L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - z_j}{z_i - z_j}$ (polynôme de degré $n-1$, au plus) :

$$0 = \sum_{j=1}^{n} F(z_j)(z_j^\ell - z_j^k) = (z_i^\ell - z_i^k) = z_i^k (z_i^{\ell-k} - 1)$$

   Or $|z_i| = 1$, donc $z_i^k \neq 0$, ainsi

$$\boxed{z_i^{\ell-k} = 1, \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \dots n\}.}$$

$$\boxed{\text{Donc les racines de } P \text{ sont toutes des racines } \ell - k\text{-ième de l'unité.}}$$