

Devoir non surveillé n°8
Devoir en temps limité
CORRECTION

I. Evaluation d'un mélange d'une pile **/36**

1. Autour de $\mathcal{T}$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{U}$.

- (a) Une transposition de $\mathcal{T}$ est parfaitement définie par une paire de $\mathbb{N}_n$.

Une transposition de $\mathcal{K}$ est parfaitement définie par la donnée de $i \in \mathbb{N}_{n-1}$.

Un cycle de $(\mathcal{U})$ est parfaitement définie par le couple (i, j) , avec $i \neq j$ dans $\mathbb{N}_n$.

Mais certain couple sont compté deux fois...

On note $\mathcal{U}^+ = \{c_{i,j}, i > j\}$ et $\mathcal{U}^- = \{c_{i,j}, i < j\}$. Alors $\mathcal{U} = \mathcal{U}^+ \cup \mathcal{U}^-$.

Mais $\mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}^- = \mathcal{K}$ car $c_{i,j} = c_{j,i} \Leftrightarrow j = i + 1$ ou $j = i - 1$.

$$\text{Donc } \text{card}(\mathcal{U}) = \text{card}(\mathcal{U}^+) + \text{card}(\mathcal{U}^-) - \text{card}(\mathcal{K}) = n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2 \quad /2$$

$$\text{Donc } \text{card}(\mathcal{T}) = \binom{n}{2}, \text{card}(\mathcal{K}) = n-1 \text{ et } \text{card}(\mathcal{U}) = (n-1)^2.$$

- (b) e n'appartient ni à $\mathcal{T}$ ni à $\mathcal{U}$. /1

$$\text{Ni } \mathcal{T} \text{ ni } \mathcal{U} \text{ ne sont des sous-groupes de } \mathfrak{S}_n.$$

- (c) On suppose que $i < j$.

Par permutation circulaire, puis d'après la formule vue dans le cours :

$$c_{i,j} = (i, i+1, \dots, j-1, j) = (i+1, i+2, \dots, j-1, j, i) = (i+1, i+2, \dots, j)(j, i)$$

Donc comme $c_{j,i+1} = c_{i+1,j}^{-1}$:

$$c_{j,i+1} \circ c_{i,j} = [c_{i+1,j}^{-1} c_{i+1,j}] \circ (j, i) = (j, i) = (i, j)$$

Et si $i > j$.

$$\begin{aligned} c_{j,i+1} \circ c_{i,j} &= c_{j,i+1} [c_{j,i}]^{-1} = c_{j,i+1} \circ (i, j, j+1, \dots, i-1)^{-1} = c_{j,i+1} \circ ((i, j)(j, j+1, \dots, i-1))^{-1} \\ &= c_{j,i+1} (j, j+1, \dots, i-1)^{-1} (i, j)^{-1} = c_{j,i+1} c_{j,i+1}^{-1} (i, j)^{-1} = (i, j) \end{aligned}$$

/2

$$c_{j,i+1} \circ c_{i,j} = (i, j)$$

On a donc pour tout $(i, j) \in \mathcal{T}$, $(i, j) \in \langle \mathcal{U} \rangle$. Donc $\langle \mathcal{U} \rangle$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ qui contient $\mathcal{T}$.

Donc $\langle \mathcal{T} \rangle \subset \langle \mathcal{U} \rangle$, car $\langle \mathcal{T} \rangle$ est le plus petit sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ contenant $\mathcal{T}$.

Or, on sait que $\langle \mathcal{T} \rangle = \mathfrak{S}_n$, donc $\mathfrak{S}_n \subset \langle \mathcal{U} \rangle$.

L'inclusion réciproque est évidente : tout est dans $\mathfrak{S}_n$. /1,5

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \mathfrak{S}_n.$$

- (d) Soit $c_{i,j} \in \mathcal{U}$, alors

si $i < j$: $c_{i,j} = (i, i+1)(i+1, i+2) \dots (j-1, j) \in \langle \mathcal{K} \rangle$.

si $i > j$, alors comme précédemment : $c_{j,i} \in \langle \mathcal{K} \rangle$ et donc $c_{i,j} = c_{j,i}^{-1} \in \langle \mathcal{K} \rangle$.

Donc $\langle \mathcal{K} \rangle$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ qui contient $\mathcal{H}$.

Ainsi $\mathfrak{S}_n = \langle \mathcal{U} \rangle \subset \langle \mathcal{K} \rangle$. L'inclusion réciproque est évidente. /1,5

$$\langle \mathcal{K} \rangle = \mathfrak{S}_n$$

2. Soit $U : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $U(e) = 0$ et $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{e\}$, $U(\sigma) = \min\{k \mid \sigma = eg_1 \dots g_k; g_i \in \mathcal{U}\}$.

- (a) Puisque $\langle \mathcal{U} \rangle = \mathfrak{S}_n$, tout σ est produit d'éléments de $\mathcal{U}$.

Donc pour tout $\sigma (\neq e) \in \mathfrak{S}_n$, $\{k \in \mathbb{N}^* \mid \exists g_1, \dots, g_k \in \mathcal{U}; \sigma = g_1 \dots g_k\}$ est non vide.

Il est inclus dans $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément. /1

$$\text{La fonction } U \text{ est bien définie sur } \mathfrak{S}_n.$$

- (b) Soit $k = U(\sigma)$. Donc il existe $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{U}$ tels que $\sigma = g_1 \cdots g_k$.

Alors $\sigma^{-1} = g_k^{-1} \cdots g_1^{-1}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $g_i^{-1} \in \mathcal{U}$.

Donc $U(\sigma^{-1}) \leq k = U(\sigma)$.

Pour les mêmes raisons : $U(\sigma) = U((\sigma^{-1})^{-1}) \leq U(\sigma^{-1})$.

Par double inégalité :

$$\boxed{\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, U(\sigma^{-1}) = U(\sigma).}$$

/1,5

- (c) Soit $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, supposons que $U(\sigma) = k$ et $U(\tau) = p$.

il existe $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{U}$ tels que $\sigma = g_1 \cdots g_k$.

il existe $h_1, \dots, h_p \in \mathcal{U}$ tels que $\tau = h_1 \cdots h_p$.

Donc $\sigma\tau = g_1 \cdots g_k \circ h_1 \cdots h_p$.

Chacune de ces $k + p$ permutations est élément de $\mathcal{U}$, donc $U(\sigma\tau) \leq k + p$.

/1

$$\boxed{\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n, U(\sigma\tau) \leq U(\sigma) + U(\tau).}$$

- (d) Si $j = i + 1$ ou $j = i - 1$, alors $(i, j) = c_{i,j} \in \mathcal{U}$, donc $U((i, j)) = 1$.

Si $j \notin \{i - 1, i + 1\}$, alors aucun cycle de $\mathcal{U}$ ne donne la permutation (i, j) , donc $U((i, j)) > 1$.

Par ailleurs, on a vu que $c_{j,i+1} \circ c_{i,j} = (i, j)$, donc $U((i, j)) \leq 2$. On peut donc conclure :

/1,5

$$\boxed{\text{Si } i \neq j \in \mathbb{N}_n, U((i, j)) = \begin{cases} 1 & \text{si } |j - i| = 1 \\ 2 & \text{si } |j - i| > 1 \end{cases} .}$$

3. Pour mieux comprendre ces définitions, on considère pour cette question la permutation s de $\mathfrak{S}_n$ (avec $n = 7$), codée par le mot $[7, 2, 3, 6, 1, 5, 4]$.

- (a) On applique l'algorithme des orbites : On trouve $s = (1, 7, 4, 6, 5)$ (2 et 3 ont fixes par s).

On peut le décomposer en produit de transposition : $s = (1, 7)(7, 4)(4, 6)(6, 5)$.

On applique ensuite la règle de 1.(c) : $(1, 7) = c_{7,2}c_{1,7} \dots$, on trouve finalement :

/1,5

$$\boxed{s = [7, 2, 3, 6, 1, 5, 4] = (1, 7, 4, 6, 5) = (1, 7)(7, 4)(4, 6)(6, 5) = c_{7,2}c_{1,7}c_{7,5}c_{4,7}c_{6,5}c_{4,6}c_{5,6}}$$

- (b) La décomposition précédente obtenue pour s n'est pas optimale.

On note l'image de $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ entre crochets :

$$\begin{aligned} c_{6,7}c_{4,7}c_{4,2}c_{1,7}[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] &= c_{6,7}c_{4,7}c_{4,2}[7, 1, 2, 3, 4, 5, 6] = c_{6,7}c_{4,7}[7, 2, 3, 1, 4, 5, 6] \\ &= c_{6,7}[7, 2, 3, 6, 1, 4, 5] = [7, 2, 3, 6, 1, 5, 4] = s[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] \end{aligned}$$

Donc on a $s = c_{6,7}c_{4,7}c_{4,2}c_{1,7}$ et

/2

$$\boxed{U(s) \leq 4}$$

- (c) La sous-suite $[7, 6, 5, 4]$ est décroissante, de longueur 4 et extraite de s .

Elle correspond à la suite d'indices : 1, 4, 6, 7

/1

$$\boxed{\text{Une sous-suite décroissante de } s \text{ de longueur 4 est } 1, 4, 6, 7 \text{ } ([7, 6, 5, 4]).}$$

(C'est la seule).

Pour les suites croissantes, on écrit toutes les sous-suites croissantes possibles :

$$[7], [2, 3, 6], [2, 3, 5], [2, 3, 4], [2, 6], [2, 5], [2, 4], [3, 6], [3, 5], [3, 4], [6], [1, 5], [1, 4], [5] \text{ et } [4]$$

/2

$$\boxed{\text{Donc } L(s) = 3.}$$

4. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- (a) On suppose que $\sigma = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$ Soit $i < j \in \mathbb{N}_n$.

Alors $\sigma c_{i,j}(k) = \sigma(k)$ si $k \notin [i, j]$; $\sigma c_{i,j}(k) = \sigma(k + 1)$ si $k \in [i, j - 1]$ et $\sigma c_{i,j}(j) = \sigma(i)$.

On a donc

/2

$$\boxed{\sigma c_{i,j} = [\sigma(1), \dots, \sigma(i - 1), \sigma(i + 1), \dots, \sigma(j), \sigma(i), \sigma(j + 1), \dots, \sigma(n)]}$$

On comprend alors la citation « $\sigma c_{i,j}$ est le mot obtenu à partir du mot σ en déplaçant la lettre en position jusqu'à la position j ».

- (b) On note $i_1, i_2, \dots, i_k$, une sous-suite croissante de σ tel que $k = L(\sigma)$.

La seule différence entre σ et $\sigma c_{i,j}$ se trouve dans le déplacement de $\sigma(i)$ passé de la i -ème position à la position de j .

On commence par une minoration de $L(\sigma c_{i,j})$.

- Si il existe h tel que $i_h = i$ (i.e $\sigma(i)$ est dans la sous-suite croissante de σ de longueur k).
Alors la suite $i_1 < i_2 < \dots i_{h-1} < i_{h+1} < \dots i_k$ est une sous-suite croissante de $\sigma c_{i,j}$.
Et donc $L(\sigma c_{i,j}) \geq k - 1$.
 - Si pour tout h , $i_h \neq i$.
Alors la suite $i_1 < i_2 < \dots i_{h-1} < i_h < \dots i_k$ est une sous-suite croissante de $\sigma c_{i,j}$.
Et donc $L(\sigma c_{i,j}) \geq k$.
- Donc, dans tous les cas : $L(\sigma c_{i,j}) \geq L(\sigma) - 1$.
On démontre de même la majoration de $L(\sigma c_{i,j})$ (ou plutôt la minoration de $L(\sigma)$).
On suppose que $k' = L(\sigma c_{i,j})$ et on considère $j_1, j_2, \dots j_{k'}$, une sous-suite croissante de $\sigma c_{i,j}$.
- Si il existe h tel que $j_h = j$ (i.e $\sigma(i)$ est dans la sous-suite croissante de $\sigma c_{i,j}$).
Alors la suite $j_1 < j_2 < \dots j_{h-1} < j_{h+1} < \dots j_{k'}$ est une sous-suite croissante de σ .
Et donc $k = L(\sigma) \geq k' - 1$.
 - Si pour tout h , $j_h \neq j$.
Alors la suite $j_1 < j_2 < \dots j_{h-1} < j_h < \dots j_{k'}$ est une sous-suite croissante de σ .
Et donc $L(\sigma) \geq k'$.
- Donc, dans tous les cas : $L(\sigma) \geq L(\sigma c_{i,j}) - 1$.
Ainsi : $-1 \leq L(\sigma c_{i,j}) - L(\sigma) \leq 1$ /2

$$\boxed{\text{Pour tout } i \neq j \in \mathbb{N}_n, |L(\sigma c_{i,j}) - L(\sigma)| \leq 1.}$$

- (c) Supposons que $U(\sigma) = k$. Donc il existe $g_1, \dots g_k \in \mathcal{U}$ tels que $\sigma = eg_1 \dots g_k$.
La question précédente, affirme que pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$ et tout $g \in \mathcal{U}$, $L(s) - 1 \leq L(sg)$.
Donc : $L(\sigma) = L(\underbrace{eg_1 \dots g_{k-1}}_s g_k) \geq L(\underbrace{eg_1 \dots g_{k-1}}_s) - 1$.

Puis par récurrence (relativement triviale) :

$$L(\sigma) \geq L(eg_1 \dots g_h) - (k - h) \implies L(\sigma) \geq L(eg_1) - (k - 1) \geq L(e) - k = n - U(\sigma)$$

En effet, pour l'identité e , $(1, 2, \dots n)$ est la plus grande sous-suite croissante : $L(e) = n$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi } L(\sigma) + U(\sigma) \geq n.}$$

Pour la minoration réciproque, on note :

$$\mathcal{P}_k : \ll \text{Si } L(\sigma) = n - k, \text{ alors } U(\sigma) \leq k \gg.$$

- Supposons que $L(\sigma) = n$ (ie $k = 0$), alors nécessairement $\sigma = [1, 2, \dots n]$ et donc $\sigma = e$.

Dans ce cas, on a vu que $U(\sigma) = 0 \leq k$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Soit $k < n$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Soit σ tel que $L(\sigma) = n - (k + 1) = n - k - 1$.

Notons $i_1, \dots i_{n-k-1}$, les termes d'une sous-suite croissante maximale de σ .

Puisque $k < n$, il existe $I \notin \{i_1, i_2, \dots i_{n-k-1}\}$.

Il y a trois possibilités (non exclusives) :

- ou bien $I < i_1$,

Le nombre $\sigma(I)$ est trop grand : $\sigma(I) > \sigma(i_1)$, sinon, il serait dans la suite.

Il existe alors une place s tel que $\sigma(i_s) < \sigma(I) < \sigma(i_{s+1})$ (ou $\sigma(i_{n-k-1}) < \sigma(I)$).

Dans ce cas, la permutation circulaire c_{I, i_s} place I dans une position acceptable.

Autrement écrit : $\sigma c_{I, i_s}$ admet une sous-suite croissante d'ordre $n - k$: $i_1, i_2, \dots i_s, I, i_{s+1}, i_{n-k-1}$.

- ou bien $I > i_{n-k-1}$,

Le nombre $\sigma(I)$ est trop petit : $\sigma(I) < \sigma(i_{n-k-1})$, sinon, il serait dans la suite.

Il existe alors une place s tel que $\sigma(i_{s-1}) < \sigma(I) < \sigma(i_s)$ (ou $\sigma(I) < \sigma(i_1)$).

Dans ce cas, la permutation circulaire $c_{I, i_s} = c_{i_s, I}^{-1}$ place I dans une position acceptable.

Autrement écrit : $\sigma c_{I, i_s}$ admet une sous-suite croissante d'ordre $n - k$: $i_1, i_2, \dots i_{s-1}, I, i_s, i_{n-k-1}$.

- ou bien $\exists h \in \llbracket 1, n - k - 2 \rrbracket$ tel que $i_h < I < i_{h+1}$.

Selon que $\sigma(I) > \sigma(i_{h+1})$ (déplacement vers la droite) ou que $\sigma(I) < \sigma(i_s)$ (déplacement vers la gauche),

il est possible de transformer σ avec une permutation circulaire c de $\mathcal{U}$, de manière à ce que σc admette une sous-suite croissante de $n - k$ éléments (la même que celle de σ avec I , en plus, bien placé).

Dans tous les cas, il existe $c \in \mathcal{U}$ tel que σc admet une suite croissante d'ordre $n - k$.

Donc $L(\sigma c) \geq n - k$.

Or $L(\sigma c) \leq L(\sigma) + 1 = (n - k - 1) + 1 = n - k$.

Par double inégalité : $L(\sigma c) = n - k$.

On peut appliquer $\mathcal{P}_k$ et donc $U(\sigma c) \leq k$.

Or $U(\sigma) = U(\sigma c c^{-1}) \leq U(\sigma c) + U(c^{-1}) \leq k + 1$ ($c^{-1} \in \mathcal{U}$, donc $U(c^{-1}) \leq 1$). Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$.

On a donc, pour toute valeur de $L(\sigma)(=n-k)$, $U(\sigma) \leq k = n - L(\sigma)$, i.e.

/3,5

$$U(\sigma) + L(\sigma) \leq n$$

Par double inégalité :

$$U(\sigma) + L(\sigma) = n$$

🕒 Remarques !

🔗 Pour l'exemple précédent, on a donc $U(s) = 7 - L(s) = 7 - 3 = 4$.

5. On considère $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(a) On joue la réussite à partir de la pile de cartes associé à la permutation σ .

Lorsqu'une nouvelle colonne se crée, la valeur de la carte qui est posée est nécessairement plus grande que celles de tous les numéros situés en bas des piles (à ce moment là).

Ces derniers numéros ont déjà été placés, donc ils sont apparus avant dans la lecture de la pile de carte.

Ainsi, pour chaque colonne, tous les éléments de la colonne admettent un élément plus petit dans la colonne de gauche et apparu plus tôt dans la pile de carte.

Par conséquent, en partant de la pile de droite à la fin du jeu, et d'une de ses cartes, *il est possible de trouver une carte dans la pile précédente (juste à sa gauche), apparue plus tôt et plus petite*. Puis pour celle-ci, de trouver dans sa pile juste à gauche, une carte plus petite et apparue plus tôt... Ainsi jusqu'à la première pile.

On a alors trouver une sous-suite croissante de σ , de longueur égale au nombre de pile (même si on l'a écrit dans l'ordre décroissant).

/2

Le nombre de colonnes de la configuration finale est inférieure à $L(\sigma)$.

Réciproquement, considérons $(i_1, i_2 \dots i_k)$ est une sous-suite croissante de σ .

Nous allons montrer que la réussite donne une configuration avec plus de k cases.

Lorsque $\sigma(i_1)$ apparaît dans la pile, il se trouve, « dans le pire des cas », tout à gauche.

Lorsque $\sigma(i_2)$ apparaît dans la pile, se trouve sous $\sigma(i_1)$ que des éléments plus petits que $\sigma(i_1)$. Donc nécessairement, $\sigma(i_2)$ se trouve dans une seconde pile à droite de la première (pas nécessairement JUSTE à droite).

Et ainsi de suite : il y a nécessairement plus de k piles dans le jeu de réussite pour σ .

Donc si $L(\sigma) = K$, alors il existe $(i_1, \dots i_K)$ une sous-suite croissante de σ .

Et donc la réussite admet nécessairement plus de K colonnes. Donc,

/2

Le nombre de colonnes de la configuration finale est supérieure à $L(\sigma)$.

Par double inégalité :

Le nombre de colonnes de la configuration finale est égale à $L(\sigma)$.

(b) Une solution possible :

/3,5

```

1 def reussite(s):
2     """s est écrit sous forme de liste de permutation"""
3     T=[[s[0],1]] #T est la liste des listes de colonne
4     #On garde en memoire i+1 et s[i] (i+1:decalage Python)
5     for k in range(1,len(s)):
6         val=s[k]
7         i=0
8         while i<len(T) and val>T[i][len(T[i])-1][0]:
9             i+=1
10        if i<len(T):
11            T[i].append([val,k+1])
12        else :
13            T.append([val,k+1])
14    return(T)
15
16 def crois_max(s):
17     """Renvoie la plus longue sous-suite croissante (valeur et position)"""
18     T=reussite(s)
19     L=len(T) #longueur de la suite croissante max

```

```

20     s=[T[L-1][0]]
21     for k in range(L-1):
22         r=0
23         a=T[L-k-2][r]
24         while a[0]>s[0][0] or a[1]>s[0][1]:
25             r+=1
26             a=T[L-k-2][r]
27         s=[a]+s
28     return(s)

```

II. Tableaux de Young /30

1. (a) On a les 7 partitions suivantes :

/1,5

$$1+1+1+1+1 = 1+1+1+2 = 1+1+3 = 1+2+2 = 1+4 = 2+3 = 5$$

(b) Le calcul est le suivant :

$$\begin{aligned}
 & [(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5)(1+X^2+X^4)(1+X^3)(1+X^4)(1+X^5)]_5 X^5 \\
 &= X^5 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 + X^3 \times X^2 \times 1 \times 1 \times 1 + X^2 \times 1 \times X^3 \times 1 \times 1 + X \times X^4 \times 1 \times 1 \times 1 \\
 &+ X \times 1 \times 1 \times X^4 \times 1 + 1 \times X^2 \times X^3 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times X^5 = 7X^5
 \end{aligned}$$

Donc

/1,5

$$[(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5)(1+X^2+X^4)(1+X^3)(1+X^4)(1+X^5)]_5 = 7 = r_5$$

Remarques !

On retrouve une bijection entre les listes λ et le calcul précédent.
Lorsqu'on rencontre le calcul $X^a X^{2b} X^{3c} X^{4d} X^{5e}$, cela correspondait au vecteur

$$\lambda = (\underbrace{5, \dots, 5}_e, \underbrace{4, \dots, 4}_d, \underbrace{3, \dots, 3}_c, \underbrace{2, \dots, 2}_b, \underbrace{1, \dots, 1}_a)$$

Ce ce que l'on va expliquer à la question suivante

(c) On note $r_n = \text{card}(\{\lambda \mid \lambda \vdash n\})$.

Lorsqu'on développe le produit : $\prod_{i=1}^n (\sum_{k=0}^n X^{ik})$, on obtient une somme de termes correspon-

dant exactement à un produit d'un et un seul terme de $P_i = \sum_{k=0}^n X^{ik}$.

On trouve une addition de monômes de la forme $\prod_{i=1}^n X^{ik_i} = X^{\sum_{i=1}^n ik_i}$ où pour tout $i, k_i \in \mathbb{N}$.
On trouve alors devant le monôme X^n , le nombre de fois où l'on a pu produire une somme

$$\sum_{i=1}^n ik_i = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k_1 \text{ fois}} + \underbrace{2 + \dots + 2}_{k_2 \text{ fois}} + \dots + \underbrace{n + \dots + n}_{k_n \text{ fois}} \text{ égale à } n.$$

Il s'agit donc du nombre de fois où l'on a pu décomposer n en somme d'entiers plus petits que n . Aucune somme n'est oubliée.

/2

$$\text{Pour tout } n \geq 1, r_n = \left[\prod_{i=1}^n (\sum_{k=0}^n X^{ik}) \right]_n.$$

(d) Pour les séries formelles. Pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1-X^i} = 1 + X^i + X^{2i} + \dots + X^{ni} + X^{(n+1)i} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} X^{ki}$$

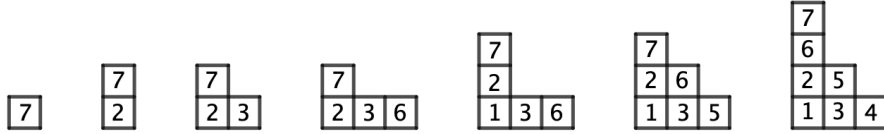
Pour toutes les puissances inférieures à ni , le calcul avec $\frac{1}{1-X^i}$ ou avec $1 + X^i + X^{2i} + \dots + X^{ni}$ est égal (la différence entre ces deux expressions donne des monômes de degré $\geq n$).

Donc, par produit :

$$\left[\prod_{i=1}^n (\sum_{k=0}^n X^{ik}) \right]_n = \left[\prod_{i=1}^n \frac{1}{1-X^i} \right]_n$$

$$\forall n \geq 1, \quad r_n = \left[\prod_{i=1}^n \frac{1}{1-X^i} \right]_n \left(= \left[\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1-X^i} \right]_n \right)$$

2. (a) On obtient la suite des tableaux suivants :



/2

Par exemple, lorsqu'on introduit 2, comme $2 < 7$,

il prend la place de 7, qui est décalé à l'étage du dessus.

Autre exemple, lorsqu'on introduit 3, comme $3 > 2 = \max(T(\cdot, 1)$,

on introduit alors 3, sur la même ligne mais colonne suivante...

(b) Montrons le résultat par récurrence sur le nombre de colonnes est des suites extraites.

Soit s est une suite de nombres entiers positifs tous différents (non nécessairement inclus dans un ensemble de type 1 à r), et que $P(s)$ est obtenu à partir de l'algorithme précédent.

Montrons, par récurrence sur k ,

$\mathcal{Q}_k : \ll P(s)$ possède k colonnes alors $L(s) = k$

et on peut prendre $[P(s)](L(s), 1)$ comme dernier terme de la sous-suite croissante. $\gg$

— Si $P(s) = 1$, cela signifie qu'on applique jamais la ligne 7.

Donc tout x introduit est plus petit que $T(1, \alpha)$, pour tout α .

Ainsi cela signifie que la liste est donnée par ordre décroissante et donc $L(s) = 1$.

Donc $\mathcal{Q}_1$

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}_k$ est vraie.

Soit s tel que $P(s) = k + 1$.

Notons i_{k+1} , le nombre de s qui conduit à la création de la $k + 1$ -ième colonne.

Alors $s' = s[1 : i_{k+1} - 1]$ est une suite qui s'écrit sur k colonnes.

(notation Python de suite extraite - mais avec des indices qui commencent à 1).

Donc d'après $\mathcal{Q}_k$, elle admet une sous-suite croissante de taille k , dont le terme le plus grand est situé en $[P(s')](L(s'), 1)$.

i_{k+1} est plus grand que tous les termes de la première ligne de $P(s')$ donc que $[P(s')](L(s'), 1)$.

Ainsi en ajoutant i_{k+1} à la suite précédente, on trouve une sous-suite croissante de s .

Elle est de longueur : $L(s') + 1 = k + 1$. Le terme le plus grand se trouve en $[P(s)](L(s), 1)$.

Enfin, c'est bien la plus grande sous-suite de s , sinon, on aurait une sous-suite de s' plus longue que k .

Donc $\mathcal{Q}_{k+1}$ est vraie.

On peut appliquer $\mathcal{Q}_{L(\sigma)}$:

/2,5

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la ligne du bas de $P(\sigma)$ est constituée de $L(\sigma)$ cases.

3. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(a) Le tableau $P(\sigma)^t$ est obtenue en transposant le tableau après une insertion-ligne de tous les éléments de σ . Il est donc équivalent de montrer ici que $P(\bar{\sigma})^t = P(\sigma)$.

Cela revient au même que de créer un tableau à partir de $\bar{\sigma}$, mais d'introduire les éléments par insertion-colonne.

Donc on considère l'algorithme :

$T \leftarrow \Theta$ pour i de 1 à n faire $T \leftarrow \text{INSERTION-COLONNE}(T, \sigma(i))$

Il suffit donc de montrer que : $T(\bar{\sigma}) = P(\sigma)$.

Montrons alors par récurrence :

$$\mathcal{P}_k : \ll c_{i_1} \circ \dots \circ c_{i_k}(\Theta) = \ell_{i_k} \circ \dots \circ \ell_{i_1}(\Theta) \gg$$

— $\mathcal{P}_0$ est vraie car on part de Θ dans les deux cas.

— Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie. Alors, d'après $\mathcal{P}_k$:

$$\ell_{i_{k+1}} \ell_{i_k} \circ \dots \circ \ell_{i_1}(\Theta) = \ell_{i_{k+1}} c_{i_1} \circ \dots \circ c_{i_k}(\Theta) = c_{i_1} \circ \dots \circ c_{i_k} \ell_{i_{k+1}}(\Theta)$$

car on sait que c_x et ℓ_y commutent (ici $i_{k+1} \notin \{i_1, \dots, i_k\}$).

Puis $\ell_{i_{k+1}}(\Theta) = P([i_{k+1}]) = T([i_{k+1}]) = c_{i_{k+1}}(\Theta)$.

Donc $\ell_{i_{k+1}} \ell_{i_k} \circ \dots \circ \ell_{i_1}(\Theta) = c_{i_1} \circ \dots \circ c_{i_k} c_{i_{k+1}}(\Theta)$.

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Enfin, en exploitant $\mathcal{P}_n$ (si n est la longueur de σ), on trouve exactement

$$T(\bar{\sigma}) = c_{\sigma(1)} \circ \dots \circ c_{\sigma(n)}(\Theta) = \ell_{\sigma(n)} \circ \dots \circ \ell_{\sigma(1)}(\Theta) = P(\sigma)$$

/2,5

$$P(\bar{\sigma}) = P(\sigma)^t$$

- (b) D'après la question précédente, le nombre de case dans la colonne de gauche de $P(\sigma)$ est égale à celui du nombre de lignes de $P(\sigma)^t$, donc de $P(\bar{\sigma})$. Il est donc également égale à $L(\bar{\sigma})$. Or puisque $\bar{\sigma}$ est miroir de σ , la sous-suite $(i_1, \dots, i_k)$ croissante de longueur maximale de $\bar{\sigma}$ est exactement la sous-suite $(n - i_k, \dots, n - i_1)$ décroissante de longueur maximale de σ .

/1,5

Le maximum des longueurs des sous-suites décroissantes de σ est égal au nombre de cases dans la colonne de gauche de $P(\sigma)$.

4. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n^2}$.

On sait que $U(\sigma) = n^2 - L(\sigma)$ et de même $U(\bar{\sigma}) = n^2 - L(\bar{\sigma})$. Donc

$$\min\{U(\sigma), U(\bar{\sigma})\} = \min\{n^2 - L(\sigma), n^2 - L(\bar{\sigma})\} = n^2 - \max\{L(\sigma), L(\bar{\sigma})\}$$

Or $L(\sigma) = \text{card}([P(\sigma)](\cdot, 1))$ et $L(\bar{\sigma}) = \text{card}([P(\bar{\sigma})](\cdot, 1)) = \text{card}([P(\sigma)]^t(\cdot, 1)) = \text{card}([P(\sigma)](1, \cdot))$.

Notons alors $L = \text{card}([P(\sigma)](\cdot, 1))$, le nombre de cases de la première ligne de $P(\sigma)$

et $C = \text{card}([P(\sigma)](1, \cdot))$, le nombre de cases de la première colonne de $P(\sigma)$

Donc $\max\{L(\sigma), L(\bar{\sigma})\} = \max\{L, C\}$.

Par ailleurs, les n^2 nombres du mot $[\sigma(1), \dots, \sigma(n^2)]$ sont rangés dans le tableau $P(\sigma)$.

Donc le tableau de n^2 cases doit se ranger dans le rectangle de côté $L \times C$

Donc $n^2 \geq L \times C$. Nécessairement, ou bien $L \geq n$, ou $C \geq n$ (sinon, contradiction).

Ainsi, $\max\{L, C\} \geq n$.

Donc

/2

$$\min\{U(\sigma), U(\bar{\sigma})\} \leq n^2 - n = n(n-1)$$

Pour trouver un cas d'égalité dans une inégalité, il faut étudier le cas limite.

On aimerait donc trouver une permutation σ de $\mathfrak{S}_{n^2}$ telle que $L = C = n$.

Il faudrait que le tableau de σ soit carré, d'ordre n .

On peut par exemple, commencer par faire une première colonne : $\sigma = [n, n-1, \dots, 1, \dots]$, alors

$P(\sigma)$ commence par créer une tour de nombres de 1 à n (vers le haut).

Puis on ajoute une seconde colonne avec par exemple : $[2n, 2n-1, \dots, n+1]$. Et ainsi de suite. /1,5

$$\text{Avec } \sigma = [n, n-1, \dots, 1, 2n, 2n-1, \dots, n+1, \dots, n^2, n^2-1, \dots, n(n-1)+1], U(\sigma) = U(\bar{\sigma}) = n(n-1).$$

On vérifie bien qu'avec une telle suite $L(\sigma) = L(\bar{\sigma}) = n = n^2 - n(n-1)$.

5. (a) L'algorithme de Robinson-Schensted appliqué à σ donne deux tableaux de même forme nécessairement. En effet, à chaque étape, ils ont la forme (celle de P' de l'algorithme).

On obtient bien des tableaux de Young,

puisque l'on retrouve des suites croissantes en colonnes $S \rightarrow N$ et en ligne $O \rightarrow E$.

C'est le cas de P , on l'a vu avec l'algorithme qui définit $P(\sigma)$ (ici c'est le même).

C'est le cas de Q , à chaque étape on ajoute une nouvelle case à droite ou en haut,

avec un nombre plus grand que tous les autres, à chaque étape de l'algorithme.

Pour montrer que RS , l'application définie par l'algorithme est bijective, on va démontrer comment obtenir σ à partir d'un couple quelconque de tableaux de même forme. /1

☀ Piste de recherche...

On commence par voir sur l'exemple donné comment construire RS^{-1} . On remarque d'abord que dans le tableau Q , le numéro affiché dans une case correspond au moment où cette case a été créée. Ainsi, la case tout en haut notée 7 est la dernière créée.

Mais cela ne signifie pas que c'est 7 qui a été introduit. Il est arrivé tout en haut car poussée de la ligne i à la ligne $i+1$ par un nouveau nombre introduit en ligne i : nécessairement le nombre le plus grand plus petit que 7. C'est à dire 6.

De même pour le 6 avec la ligne précédente : il a été poussé par le 5, le 5 poussé par le 4.

On sait en regardant Q et P : que 4 est le dernier nombre introduit, et la disposition des nombres avant l'arrivée de 4.

On connaît donc l'avant-dernier tableau.

Puis (en remontant le temps) Q indique que c'est la case de 6 qui a été introduite, poussé par 5 de la ligne précédente. Donc c'est 5, l'avant dernier terme introduit. On connaît donc l'avant dernier tableau qui conduit à P .

La 5-ième case créée est celle où se trouve alors 7. Elle a été créée car 7 a été poussé par 2. Ce dernier vient de la ligne d'en dessous, poussé par le plus grand nombre plus petit que 2 : 1. C'est donc 1,

l'antépénultième nombre de σ .
 Et ainsi de suite : $\sigma = [7, 2, 3, 6, 1, 5, 4]$.

Ecriture de RS^{-1} .

Nous allons supprimer les cases de P dans l'ordre inverse de celui dans lequel elles sont apparues, cet ordre étant enregistré dans le tableau Q . A chaque étape de ce nouvel algorithme, on agrandit la fin de σ et on trouve le P intermédiaire.

Voici le déroulement de étape k (k allant de n à 1).

On suppose qu'on connaît donc P_k , le tableau partiel de Young obtenue à la fin de l'étape k de $RS(\sigma)$ ainsi que $\sigma[k+1 : n]$ (notation Python).

On considère $u = (j, i)$ tel que $Q(j, i) = k$. Puis on note $x = P(j, i)$.

— si $i > 1$, nécessairement x se trouve sur cette ligne, poussé par un élément de la ligne inférieure.

Cet élément, comme il a pris la place de x est nécessairement le plus grand des éléments de la ligne $i - 1$ plus petit que x .

On suppose que cet élément est x' , placé en $(j', i - 1)$.

On fait donc $P(j, i) = \Theta$, $P(j', i - 1) = x$ et $x = x'$.

Et on reconduit ces quelques lignes jusqu'à ce que $i = 1$.

— si $i = 1$, nécessairement j est maximal (Q est un tableau de Young) et donc x est le nombre introduit.

On enlève la case u à P , on ajoute x en début de suite σ Et on passe à l'étape $k - 1$.

RS admet une application réciproque (à partir du moment où nous sommes partis de deux tableaux de Young, l'algorithme qui définit RS^{-1} termine bien).

/2,5

L'algorithme de Robinson-Schensted définit une bijection entre $\mathfrak{S}_n$ et les couples de tableaux de Young de même forme et de taille n .

(b) On note RS la bijection définie à la question précédente.

On note aussi $\mathfrak{S}_n^k = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid L(\sigma) = k\}$, c'est un sous-ensemble de $\mathfrak{S}_n$.

Alors, par bijectivité : $\text{card}(\mathfrak{S}_n^k) = \text{card}(RS(\mathfrak{S}_n^k))$.

Or $(RS(\mathfrak{S}_n^k)) = \bigsqcup_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 = k}} \{(P, Q) \mid \text{sh}(P) = \text{sh}(Q) = \lambda\} = \bigsqcup_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 = k}} T_\lambda \times T_\lambda$

où $T_\lambda = \{T \mid \text{sh}(T) = \lambda\}$ et dont on a noté d_λ son cardinal.

Donc (la réunion est disjointe) : $\text{card}(\mathfrak{S}_n^k) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 = k}} [\text{card}(T_\lambda)]^2 = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 = k}} d_\lambda^2$ /2

Enfin (la réunion est disjointe) :

$$n! = \text{card}(\mathfrak{S}_n) = \text{card}\left(\bigsqcup_{k=1}^n \mathfrak{S}_n^k\right) = \sum_{k=1}^n \text{card}(\mathfrak{S}_n^k) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 = k}} d_\lambda^2\right) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 \leq n}} d_\lambda^2 = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2 \quad /1$$

$$\text{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid L(\sigma) = k\} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 = k}} d_\lambda^2 \quad \text{et} \quad n! = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$$

(c) Notons déjà que : $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = 2\} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^{-1} = \sigma\}$.

On a les équivalences (SP est bijective) :

$$\sigma^2 = e \iff SP(\sigma) = SP(\sigma^{-1}) \iff P(\sigma) = P(\sigma^{-1}) \text{ et } Q(\sigma) = Q(\sigma^{-1})$$

On obtient, en exploitant le théorème de Schützenberger : $\sigma^2 = e \iff P(\sigma) = Q(\sigma)$.

Il y a donc autant de permutation σ tel que $\sigma^2 = e$ que d'éléments de $\bigoplus_{\lambda \vdash n} T_\lambda$ (plus de couples ici). Donc :

$$\text{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = 2\} = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda \quad /1,5$$

Par ailleurs, si on décompose σ en produit de cycles disjoints $c_1 \dots c_k$, ceux-ci sont d'ordre et donc de taille ≤ 2 .

On peut les dénombrer.

On commence par fixer k le nombre de 2-cycle. On a $k \in \{0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ Les ensembles, pour des valeurs de k différentes, sont disjoints.

Pour déterminer une telle permutation on fait une description exacte :

— Choix de premier 2-cycle : $\binom{n}{2}$ possibilités

Il s'agit d'un ensemble car pour un 2-cycle, $(a b) = (b a)$.

- Choix d'un second 2-cycle : $\binom{n-2}{2}$ possibilités.
- etc. Choix d'un k -ieme 2-cycle : $\binom{n-2(k-1)}{2}$ possibilités.

Cela donne un nombre de possibilités (coefficient multinomial) : $\frac{n!}{2!2! \cdots 2!(n-2k)!} = \frac{n!}{2^k(n-2k)!}$.

Par ailleurs, en faisant cela, on différencie les différents 2-cycles.

Or ceci commute, donc une même σ est définie par les permutations de ces k 2-cycle.

On en a donc compter $k!$ fois trop. Finalement

$$\text{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = 2\} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k(n-2k)!k!} \quad /2$$

Bilan :

$$\boxed{\sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda = \text{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = 2\} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}}$$