Devoir non surveillé n°8
Devoir en temps limité

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème en deux parties. La troisième sera traitée pendant les vacances. Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole ($*$) voire ($**$).
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Notations et rappels

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dans tout le sujet, n est un entier fixé.

- On note $\mathbb{N}_n = \mathbb{N} \cap [1, n]$
- $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique de degré n, i.e l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots n\} = \mathbb{N}_n$ muni de la composition comme loi de groupe. L'élément neutre de $\mathfrak{S}_n$ est noté e.
  La composition des permutations est notées multiplicativement, on écrit donc $\sigma\sigma'$ pour désigner $\sigma \circ \sigma'$ ou encore σ^{-1} pour l'inverse de σ.
- La *transposition* (i, j) $(i \neq j)$ est la permutation de support $\{i, j\}$.
  On note $\mathcal{T} = \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{N}_n \text{ et } i \neq j\}$. On rappelle que $< \mathcal{T} >= \mathfrak{S}_n$
- On note $\mathcal{K} = \big\{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{N}_{n-1}\big\}$.
- Ici,
  pour $i < j$ on note $c_{i,j}$ le cycle de $\mathfrak{S}_n$, de support $\{i, i+1, \ldots j\}$
  tel que $\sigma(k) = k+1$ pour $k \in \{i, i+1, \ldots j-1\}$ et $\sigma(j) = i$.
  pour $i > j$ on note $c_{i,j}$ le cycle $c_{j,i}{}^{-1}$.
  On note $\mathcal{U} = \{c_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}_n \text{ et } i \neq j\}$.
- On représente une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ à l'aide du mot $[\sigma(1), \sigma(2), \ldots \sigma(n)]$ (noté entre crochet afin de le différencier d'un cycle).

I. Evaluation d'un mélange d'une pile

1. Autour de $\mathcal{T}$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{U}$.
   (a) Calculer card($\mathcal{T}$), card($\mathcal{U}$) et card($\mathcal{K}$)
   (b) $\mathcal{T}$ est-il un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$? $\mathcal{U}$ est-il un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$?
   (c) Pour $i \neq j \in \mathbb{N}_n$, simplifier $c_{j,i+1} \circ c_{i,j}$. En déduire que $< \mathcal{U} >= \mathfrak{S}_n$.
   (d) Montrer également que $< \mathcal{K} >= \mathfrak{S}_n$.
2. Soit $U : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$ tel que $U(e) = 0$ et $\forall\ \sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{e\}$, $U(\sigma) = \min\{k \mid \sigma = eg_1 \ldots g_k\ ;\ g_i \in \mathcal{U}\}$.
   (a) Montrer que la fonction U est bien définie.
   (b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, montrer que $U(\sigma^{-1}) = U(\sigma)$.
   (c) Soit $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, montrer que $U(\sigma\tau) \leqslant U(\sigma) + U(\tau)$
   (d) Soit $i \neq j \in \mathbb{N}_n$, déterminer $U\big((i, j)\big)$.
   On pourra exploiter 1.(c)

Etant donné une permutation σ,

— une *sous-suite croissante de σ de longueur k* est une suite d'indice $(i_1, i_2, \ldots i_k)$ telle que :
  · $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ i.e. : pour tout $h \in \mathbb{N}_{k-1}$, $i_h < i_{h+1}$
  · ET $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_k)$ i.e. : pour tout $h \in \mathbb{N}_{k-1}$, $\sigma(i_h) < \sigma(i_{h+1})$.

— une *sous-suite décroissante de σ de longueur k* est une suite d'indice $(i_1, i_2, \ldots i_k)$ telle que :
  · $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ i.e. : pour tout $h \in \mathbb{N}_{k-1}$, $i_h < i_{h+1}$
  · ET $\sigma(i_1) > \sigma(i_2) > \cdots > \sigma(i_k)$ i.e. : pour tout $h \in \mathbb{N}_{k-1}$, $\sigma(i_h) > \sigma(i_{h+1})$.

On note $L(\sigma)$, le maximum des longueurs des sous-suites croissantes de σ.

3. Pour mieux comprendre ces définitions, on considère pour cette question la permutation s de $\mathfrak{S}_n$ (avec $n = 7$), codée par le mot $[7, 2, 3, 6, 1, 5, 4]$ (liste des images par s des nombres 1,2. . .7, respectivement).
   (a) Décrire s comme produit de cycles (selon la définition du cours), puis comme produit de transpositions et enfin comme produit de cycles de $\mathcal{U}$.
   (b) Montrer que $U(s) \leqslant 4$.

(c) Donner une sous-suite décroissante de s de longueur 4.
Que vaut $L(s)$ (on justifiera)

4. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(a) On note $\sigma = [\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)]$ et on considère $i < j \in \mathbb{N}_n$
Donner le mot représentant la permutation $\sigma \circ c_{i,j}$.
Justifier la citation : « *$\sigma c_{i,j}$ est le mot obtenu à partir du mot σ en déplaçant la lettre en position jusqu'à la position j* ».

(b) Montrer que pour tout $i \neq j \in \mathbb{N}_n$, $|L(\sigma c_{i,j}) - L(\sigma)| \leqslant 1$.

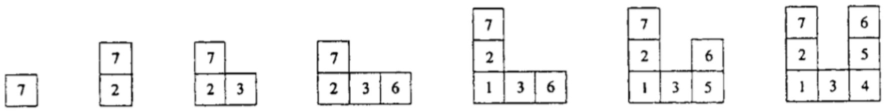
(c) En déduire que $U(\sigma) + L(\sigma) = n$.
On exploitera la question précédente, pour montrer que $U(\sigma) + L(\sigma) \geqslant n$.
Pour la minoration réciproque, on pourra raisonner par récurrence sur k où $L(\sigma) = n - k$.

Soit un ensemble de n cartes, chacune étant numérotées par un entier différent entre 1 et n.
Les cartes sont mélangées dans un ordre quelconque et arrangés dans une pile. Plus formellement, une pile de cartes s'identifie à la permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ où $\sigma(i)$ est le numéro de la carte en i-ème position dans la pile.
On appelle *déplacement élémentaire*, l'opération consistant à changer de position *une* carte de la pile.
On évalue alors le *degré de mélange* de la pile σ par le nombre minimal de déplacements élémentaires nécessaire pour obtenir la pile σ en partant de e.
On admet que <u>$U(\sigma)$ est une évaluation du mélange de la pile σ.</u>

Une *réussite* est un jeu de carte à un joueur obéissant à des règles systématiques et ne faisant donc pas intervenir la réflexion. On s'intéresse à une réussite se jouant avec une pile de n cartes de la façon suivante :

— La première carte de la pile est posée sur la table de jeu.
— puis, jusqu'à ce que la pile soit vide, la carte du dessus de la pile est posée sur la table comme suit :
  — si la nouvelle carte a un numéro supérieur à ceux des cartes déjà posées et situées en bas d'une colonne, alors elle est disposée sur une nouvelle colonne à droites des cartes déjà posées.
  — sinon, la nouvelle carte est posée tout en bas de la colonne la plus à gauche ne contenant que des cartes de numéros supérieurs au sien.

Pour bien comprendre le mécanisme de cette réussite, considérons une pile de 7 cartes dans l'ordre : 7,2,3,6,1,5,4. La suite des configurations obtenues au cours de la réussite est la suivante :



6. On considère $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(a) On joue la réussite à partir de la pile de cartes associé à la permutation σ.
Montrer que le nombre de colonnes de la configuration finale est égale à $L(\sigma)$.
(*On remarquera que dans l'exemple illustré, la ligne du bas ne correspond pas à une sous-suite croissante de la permutation.*)

(b) Proposer un algorithme (en pseudo-langage ou en Pyhton) prenant en entrée une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ (codée par son mot sous forme de liste : $[\sigma(1), \sigma(2), \ldots \sigma(n)]$) et retournant en sortie une sous-suite croissante de longueur maximale de σ.

II. Tableaux de Young

L'objet de cette partie est d'étudier de façon plus fine la combinatoire de $U(\sigma)$ et de $L(\sigma)$ à l'aide des tableaux de Young.

Une partition de $n \in \mathbb{N}^*$ est une suite d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_k)$ vérifiant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \cdots \geqslant \lambda_k$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

On utilise la notation $\lambda \vdash n$ pour signifier que λ est une partition de n.

1. (a) Donner les 7 partitions de $n = 5$.

(b) Calculer $[(1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5)(1 + X^2 + X^4)(1 + X^3)(1 + X^4)(1 + X^5)]_5$.

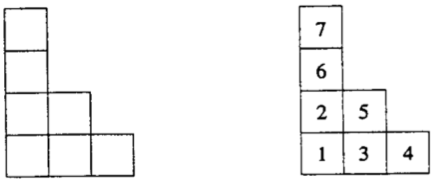
(c) On note $r_n = \text{card}(\{\lambda \mid \lambda \vdash n\})$.
Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$r_n = \left[\prod_{i=1}^{n} (\sum_{k=0}^{n} X^{ik})\right]_n$$

(d) En déduire le résultat sur les séries formelles :

$$\forall\ n \geqslant 1, \qquad r_n = \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-X^i}\right]_n$$

Le *diagramme de* FERRERS de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k) \vdash n$ est une collection de n cases arrangés en k lignes alignées par la gauche, la i-ième ligne en partant du bas contient λ_i cases.
Formellement, on IDENTIFIERA le diagramme de Ferrers avec le sous-ensembles de $(\mathbb{N}^*)^2$ correspondant au position des cases, i.e. avec $\{(j,i), 1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i\}$.
La *taille* du diagramme de Ferrers est le nombre de cases. A titre d'exemple, le diagramme de Ferrers de $(3,2,1,1) \vdash 7$ est représenté sur la gauche de la figure suivante.
Un *tableau de* YOUNG *partiel* de taille $n \in \mathbb{N}^*$ est un diagramme de Ferrers de taille n dont les cases snot numérotées par des entiers distincts et strictement positifs, de telle sorte que les numéros soient croissants de la gauche vers la droite dans chaque ligne et de bas en haut dans chaque colonne.
Un *tableau de Young* de taille $n \in \mathbb{N}^*$ est un tableau de Young partiel de taille de n, dans lequel, de plus, les cases sont numérotées par les entiers de 1 à n. Un tableau de Young est représenté à droite de la figure suivante.

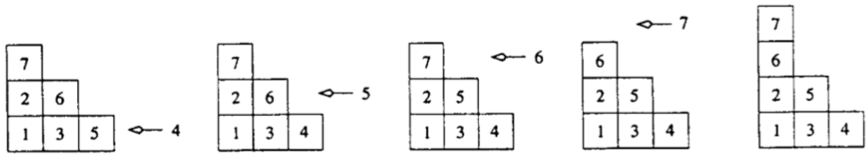


On abrège l'expression « tableau de Young »en « tableau »lorsque ceci ne prête pas à confusion. On remarque que tout tableau est un tableau partiel et d'autre part que toute ligne ou toute colonne d'un tableau est un tableau partiel.
La *forme* d'un tableau partiel T, notée $\mathrm{sh}(T)$, est le diagramme de Ferrers obtenu en oubliant les numéros (ou encore la partition correspondante).
Etant donné un tableau partiel T, l'ensemble des entiers apparaissant dans les cases de T est noté $\mathrm{num}(T)$. On identifie T avec l'application $T : (\mathbb{N}^*)^2 \to \mathrm{num}(T) \cup \{0\}$ définie par $T(j,i) = k$ si $(j,i) \in \mathrm{sh}(T)$ et k est dans la case (j,i) et par $T(j,i) = 0$ si $(j,i) \notin \mathrm{sh}(T)$. On note $T(j,\cdot)$, respectivement $T(\cdot,i)$, le tableau partiel formé de la j-ième colonne, respectivement i-ième ligne, de T.
On appelle *tableau vide* l'application Θ définie par $\forall\ i,j \in \mathbb{N}^*$, $\Theta(i,j) = 0$. La taille de Θ est 0 et on pose $\mathrm{sh}(\Theta) = \emptyset$. Si T est un tableau partiel tel que $\mathrm{sh}(T)$ contient i lignes et j colonnes, alors par convention, $T(\cdot,u) = T(v,\cdot) = \Theta$ pour $u > i$ et $v > j$.
On définit une procédure (algorithme) qui prend en entrée (T,x) où T est soit un tableau partiel soit le tableau vide et où $x \in \mathbb{N}^* \setminus \mathrm{num}(T)$. L'algorithme fonctionne avec la convention $\max\{k \mid k \in \emptyset\} = 0$.
On note $\ell_x(T)$ le résultat retourné en sortie par l'algorithme.

INSERTION-LIGNE (T,x)

- $\alpha \leftarrow 1$
- **tant que** $x < \max\{k \mid k \in \mathrm{num}(T(.,\alpha))\}$ **faire**
  - $y \leftarrow \min\{k \mid k \in \mathrm{num}(T(.,\alpha)), x < k\}$
  - soit (j,α) tel que $T(j,\alpha) = y$, **faire** $T(j,\alpha) \leftarrow x$, $x \leftarrow y$
  - $\alpha \leftarrow \alpha + 1$
- **fintantque**
- soit j la taille de $T(.,\alpha)$ **faire** $T(j+1,\alpha) \leftarrow x$
- **retourner** T

On vérifie aisément que $\ell_x(T)$ est un tableau partiel qui contient une case de plus que le tableau d'entrée T et tel que $\mathrm{num}(\ell_x(T)) = \mathrm{num}(T) \cup \{x\}$. Il est instructif de suivre l'exécution de la procédure sur un exemple. Dans la figure ci-dessous, l'insertion de 4 dans le tableau partiel de gauche donne le tableau de droite.



2. Etant donné $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $P(\sigma)$, le tableau de Young obtenu en sortie de l'algorithme suivant :

   $P \leftarrow \Theta$, **pour** i **de** 1 **à** n **faire** $P \leftarrow$ INSERTION-LIGNE $(P, \sigma(i))$

   (a) Appliquer, *à la main*, l'algorithme pour calculer $P(\sigma)$ avec $\sigma = [7,2,3,6,1,5,4]$.
   En fin d'algorithme, on doit obtenir le tableau de droite de la figure précédente.

   (b) Montrer que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la ligne du bas de $P(\sigma)$ est constituée de $L(\sigma)$ cases.

On peut définir une opération d'*insertion en colonne* duale de l'insertion en ligne définie plus haut. Plus précisément, il suffit dans l'algorithme INSERTION-LIGNE de remplacer $(\star, \alpha)$ par $(\alpha, \star)$ pour $\star = \cdot, j, j+1$. On note $c_x(T)$ le tableau partiel obtenu par l'insertion en colonne dans T de l'entier $x \in \mathbb{N}^* \setminus \mathrm{num}(T)$.
On admet le résultat de commutation suivant (la preuve est élémentaire mais peu instructive) : soit T un tableau partiel et soit $x, y \in \mathbb{N}^* \setminus \mathrm{num}(T)$, $x \neq y$, alors $c_y \circ \ell_x(T) = \ell_x \circ c_y(T)$.
Etant donné un tableau partiel T, on définit le tableau partiel *transposé* T^t par $\forall\, i, j \in \mathbb{N}^*$, $T^t(i,j) = T(j,i)$. Etant donnée une permutation $\sigma = [\sigma(1), \sigma(2), \ldots \sigma(n)]$, la permutation miroir est définie par $\overline{\sigma} = [\sigma(n), \sigma(n-1), \ldots, \sigma(2), \sigma(1)]$.

3. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
   (a) Montrer que $P(\overline{\sigma}) = P(\sigma)^t$.
   (b) Démontrer que le maximum des longueurs des sous-suites décroissantes de σ est égal au nombre de cases dans la colonne de gauche de $P(\sigma)$.

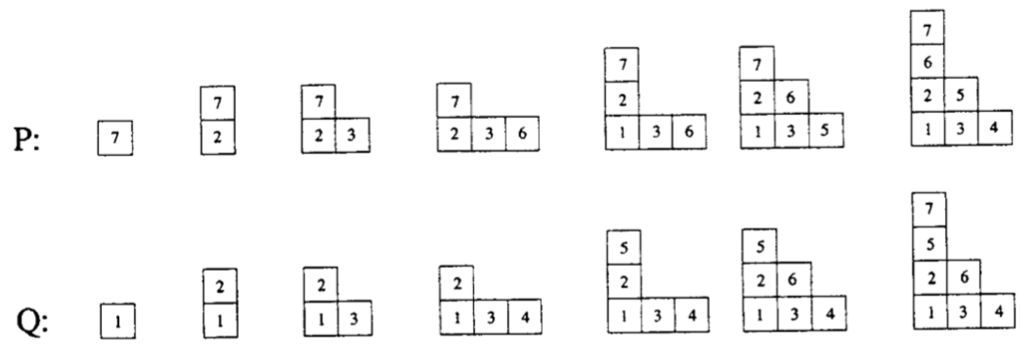
La pile $\overline{\sigma}$ est obtenue par retournement de la pile σ. On peut argumenter qu'une bonne mesure du degré de mélange de la pile est $\min\{U(\sigma), U(\overline{\sigma})\}$.

4. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n^2}$.
   Montrer que $\min\{U(\sigma), U(\overline{\sigma})\} \leqslant n(n-1)$.
   Donner explicitement une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n^2}$ telle que $U(\sigma) = U(\overline{\sigma}) = n(n-1)$.

On présente maintenant l'algorithme de ROBINSON-SCHENSTED.

RS $(n, \sigma \in \mathfrak{S}_n)$
$P \leftarrow \Theta, Q \leftarrow \Theta$
pour i **de** 1 **à** n **faire**
    $P' \leftarrow$ INSERTION-LIGNE $(P, \sigma(i))$
    soit (u,v) tel que $(u,v) \in \mathrm{sh}(P'), (u,v) \notin \mathrm{sh}(P)$, **faire**
    $Q(u,v) \leftarrow i$, $P \leftarrow P'$
retourner (P, Q)

On note $(P(\sigma), Q(\sigma))$ le résultat retourné en sortie par l'algorithme. En guise d'illustration, on a représenté les différentes étapes de l'algorithme pour la permutation $[7, 2, 3, 6, 1, 5, 4]$.



5. (a) Démontrer que l'algorithme de Robinson-Schensted définit une bijection entre $\mathfrak{S}_n$ et les couples de tableaux de Young de même forme et de taille n.
   (b) En déduire que l'on a :

$$\mathrm{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid L(\sigma) = k\} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 = k}} d_\lambda^2 \qquad \text{et} \qquad n! = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$$

   où d_λ est le nombre de tableau de Young de la forme λ.

   On admet le résultat suivant (Théorème de SCHÜTZENBERGER)
   Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma)$ et $Q(\sigma^{-1}) = P(\sigma)$.
   (c) Démontrer les égalités :

$$\sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda = \mathrm{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = e\} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k (n-2k)! k!}$$