

Devoir surveillé n°7 CORRECTION

I. Premiers résultats

0. On a donc $u = u^1 = 0$.

○ Remarques !

⌞ Réciproquement, si $u = 0$, alors u est nilpotent d'indice 0 (car $u^0 = \text{id}_E \neq 0$).

⌞ Mais, compte-tenu de la question, il semble que cela ne soit pas demandé

/1

Si u est un endomorphisme nilpotent d'indice 1, alors $u = 0$

A. Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

Dans toute cette sous-partie A, on suppose que $n = 2$.

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

1. Puisque u est nilpotent d'indice p , alors $u^{p-1} \neq 0$.

/1

C'est-à-dire, exactement : il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

2. Soient $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq p-1}$ telle que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$.

On suppose que $\{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\} \subset \mathbb{N}$ est non vide.

Il existe donc $k_0 \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $k_0 = \min\{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$.

On a donc $\sum_{k=k_0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = \sum_{k=k_0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$, car pour tout $k < k_0$, $\lambda_k = 0$.

On compose alors par u^{p-1-k_0} ($k_0 \leq p-1$, donc $p-1-k_0 \geq 0$) :

$$\begin{aligned} 0 &= u^{(p-1-k_0)}(0) = u^{p-1-k_0} \left(\sum_{k=k_0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) \right) = \lambda_{k_0} u^{p-1}(x) + \sum_{k=k_0+1}^{p-1} u^{k-1-k_0+p}(x) \\ &= \lambda_{k_0} u^{p-1}(x) + \underbrace{\sum_{h=0}^{p-2-k_0} u^h(u^{p-1-k_0}(x))}_{h=k-1-k_0} = \lambda_{k_0} u^{p-1}(x) \end{aligned}$$

par linéarité.

Or $u^{p-1}(x) \neq 0$, donc $\lambda_{k_0} = 0$. Ce qui est absurde.

Donc $\{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\} = \emptyset$. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\lambda_k = 0$.

/2

La famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

E est de dimension 2, donc

$$p = \text{card} \left((u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1} \right) \underbrace{=}_{\text{car la famille est libre}} \text{rang} (u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1} \leq \dim E \leq 2$$

Et comme par hypothèse, $p \geq 2$:

/1

$$p = 2.$$

3. Soit $x \in \text{Im } u$, il existe $a \in E$ tel que $u(a) = x$ et donc $u(x) = u^2(a) = 0$ car $u^2 = 0$.

Donc $x \in \text{Ker } u$. Ainsi $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.

On a donc $\text{rang}(u) \leq \dim \text{Ker } u$, puis en ajoutant $\text{rang } u$:

$$2 \text{rang}(u) \leq \text{rang}(u) + \dim \text{Ker } u = \dim E = 2 \Rightarrow \text{rang}(u) \leq 1$$

d'après le théorème du rang et en divisant par 2.

Or $\text{rang}(u) = 0 \Rightarrow u = 0$, ce qui est faux. Donc $\text{rang}(u) = 1$,

et toujours par théorème du rang : $\dim \text{Ker } u = 1$.

Comme les deux espaces sont de même dimension, l'un inclus dans l'autre :

/2,5

$$\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$$

4. On sait qu'il existe x tel que $u(x) \neq 0$.

On sait aussi alors que $(x, u(x))$ libre. C'est donc une base de E .

Comme $u(u(x)) = u^2(x) = 0$, on a

/1,5

$$\mathcal{M}_{(x, u(x))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$$

5. Montrons d'abord le résultat donné.

On suppose que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) \\ &= aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg = ad(eh - fg) + bc(gf - eh) \\ &= (ad - bc)(eh - fg) = \det(A) \times \det(B) \end{aligned} \quad /2$$

Considérons une matrice M nilpotente,

on note u , l'endomorphisme canoniquement associé. Alors u est nilpotent.

$$\mathcal{M}(u^k) = M^k = 0$$

Si l'indice p est 1, $u = 0$ et $M = 0$, donc $\text{tr}(M) = 0$ et $\det(M) = 0$.

Si l'indice $p \geq 2$, alors on a vu que $p = 2$ et il existe $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = J_2$.

Donc M est semblable à J_2 : il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $M = PJ_2P^{-1}$.

On a alors $\det(M) = \det(PJ_2P^{-1}) = \det P \det J_2 \det P^{-1} = \det P \times 0 \det(P^{-1}) = 0$.

et $\text{tr}(M) = \text{tr}(PJ_2P^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PJ_2) = \text{tr}(J_2) = 0 + 0 = 0$.

Donc si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $\det(M) = 0$ et $\text{tr}(M) = 0$.

/1,5

Réciproquement, supposons que $\det(M) = 0$ et $\text{tr}(M) = 0$.

Notons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} + (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det(M)M + \text{tr}(M)I_2 = 0_2$$

Donc M est nilpotente.

/1,5

Les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

B - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geq 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r .

1. $u^2 = 0$, donc pour tout $y \in \text{Im } u$,

il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et donc $u(y) = u^2(x) = 0$, donc $y \in \text{Ker } u$.

/1

$$\text{Im } (u) \subset \text{Ker } (u)$$

On a donc, en prenant les dimensions : $\text{rang } u \leq \dim \text{Ker } u$, en additionnant $\text{rang } (u)$.

/1

$$2r = 2\text{rang } (u) \leq \dim \text{Ker } u + \text{rang } (u) = \dim(E) = n$$

d'après le théorème du rang.

2. $\text{Im } u$ est de dimension r .

Il existe $f_1, \dots, f_r \in \text{Im } u$ tel que $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ base de $\text{Im } u$.

Or pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $f_i \in \text{Im } u$, donc il existe $e_i \in E$ tel que $u(e_i) = f_i$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^r \mu_i u(e_i) = 0$.

Si l'on compose par u : $\sum_{i=1}^r \lambda_i u(e_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i u^2(e_i) = u(0) = 0$.

Or $u^2(e_i) = 0$ car $u^2 = 0$.

Donc $\sum_{i=1}^r \lambda_i u(e_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i = 0$ ainsi $\forall i \in \mathbb{N}_r$, $\lambda_i = 0$, car $(f_1, \dots, f_r)$ libre.

Puis, $\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^r \mu_i u(e_i) = \sum_{i=1}^r \mu_i u(e_i) = 0$.

Pour les mêmes raisons que précédemment : pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $\mu_i = 0$.

Ainsi, la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est libre.

Par ailleurs, $\dim E = \dim \text{Im } u + \dim \text{Ker } u = r + r = 2r$.

On a donc une famille libre maximale de E , c'est une base :

/2

il existe $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est une base de E .

3. Comme pour tout i , $u(u(e_i)) = 0$ (vu plus haut), on trouve (on notant $\mathcal{B}$, cette base) :

/1

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(J_2, J_2, \dots, J_2) \in \mathcal{M}_{2r}(\mathbb{C})$$

4. On suppose $\text{Im } (u) \neq \text{Ker } (u)$, donc $\text{Im } (u) < \text{Ker } (u)$, car $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.

Comme précédemment, soit $(f_1, \dots, f_r)$ base de $\text{Im } u$, puis $(e_1, \dots, e_r)$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}_r, u(e_i) = f_i$

Puis, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $u(u(e_i)) = u^2(e_i) = 0$, donc $u(e_i) \in \text{Ker } u$.

Donc $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ famille libre de $\text{Ker } u$.

$\dim(\text{Ker } u) = \dim E - \text{rang } u = n - r$ (théorème du rang).

On complète en une base de $\text{Ker } u$ avec la famille de $n - r - r = n - 2r$ vecteurs : $(v_1, \dots, v_{n-2r})$.

Comme $u^2 = 0$, on a comme précédemment :

la famille $(e_1, u(e_1), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ est libre.

(On compose une fois par u , puis on exploite la liberté de $(u(e_1), \dots, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$.)

Par ailleurs, cette famille possède n vecteurs, linéairement indépendants.

On a donc une famille libre maximale de E , c'est une base :

/2,5

il existe $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E , $v_1, \dots, v_{n-2r}$ de $\text{Ker } u$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ est une base de E .

5. Comme pour tout i , $u(u(e_i)) = 0$ (vu plus haut), et $u(v_i) = 0$ car $v \in \text{Ker } u$ on trouve :

/1,5

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \text{diag}(\underbrace{J_2, \dots, J_2}_r \dots O_{n-2r}) \in \mathcal{M}_{2r}(\mathbb{C})$$

C - Polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que A est nilpotente.

On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (non nulle) tel que $AX = \lambda X$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n : \ll A^n X = \lambda^n X$.

— $A^0 X = I_n X = X = \lambda^0 X$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$A^{n+1} X = A \times A^n X = A \times \lambda^n X = \lambda^n A X = \lambda^n \lambda X = \lambda^{n+1} X$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

/1,5

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k X = \lambda^k X$$

En particulier $A^p X = 0 = \lambda^p X$. Or $X \neq 0$, donc $\lambda^p = 0$, i.e.

/1

$$\lambda = 0$$

2. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$, donc $AP = PD$.

Notons $E_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que ${}^k[E_i]_1 = \delta_{i,k}$,

la matrice colonne avec un 1 en ligne i et tous les autres coefficients nuls.

On note $X_i = PY_i$. X est non nul (P inversible).

Le produit par blocs donne (avec $C_k(D) : k^{\text{e}}$ colonne de D) :

$$AX_i = APY_i = PDY_i = P \times \left(\sum_{k=1}^n C_k(D) \times {}^k[E_i]_1 \right) = P \times C_i(D) = P \times \lambda_i Y_i = \lambda_i PY_i = \lambda_i X_i$$

/2

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, il existe $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$ tel que $AX_i = \lambda_i X_i$.

3. Si A est semblable à une matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale,

alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\exists X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $AX_i = \lambda_i X_i$.

Et donc d'après la question 1, $\lambda_i = 0$. Et donc $D = O_n$.

Or $A = PDP^{-1}$, donc $A = 0$.

/1,5

si A est nilpotente et semblable à une matrice diagonale alors A est nulle.

4. Soit A , une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle.
 Sans perte de généralité, on suppose que A est triangulaire supérieure. Sinon, on considère A^T .
 Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}_k : \ll \forall i, j \in \mathbb{N}_n, i \geq j - k + 1 \implies {}^i[A^k]_j = 0 \gg$$

- Par définition de A , tous les coefficients sous la diagonale (inclus) sont nuls.
 Donc si $i \geq j = j - 1 + 1$, ${}^i[A]_j = 0$.
 Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
 On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie.
 Soient $i, j \in \mathbb{N}_n$ et $i \geq j - (k + 1) + 1 = j - k$ i.e. $j \leq i + k$

$${}^i[A^{k+1}]_j = \sum_{h=1}^n {}^i[A^k]_h \times {}^h[A]_j = \sum_{h=1}^{j-1} {}^i[A^k]_h \times {}^h[A]_j + \sum_{h=j}^n {}^i[A^k]_h \times {}^h[A]_j$$

Or

- si $h \geq j$, ${}^h[A]_j = 0$, donc $\sum_{h=j}^n {}^i[A^k]_h \times {}^h[A]_j = 0$
- si $h \leq j - 1$, alors $h \leq i + k - 1$, donc $i \geq h - k + 1$ et donc d'après $\mathcal{P}_k : {}^i[A^k]_h = 0$,

$$\text{Ainsi } \sum_{h=1}^{j-1} {}^i[A^k]_h \times {}^h[A]_j = 0$$

Ainsi, si $i \geq j - (k + 1) + 1$, ${}^i[A^{k+1}]_j = 0$.

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Alors, comme pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $i - j \geq n - 1$, ${}^i[A^n]_j = 0$.

/2

Une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente

Remarques !

- On peut aussi faire la démonstration avec u , l'endomorphisme canoniquement associé (avec l'espace $E = \mathbb{C}^n$ et la base canonique).
- C'est assez classique

5. Soit $P = QX^p \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme (quelconque) multiple de X^p .
 Alors $P(A) = Q(A) \times A^p = Q(A) \times 0 = 0$.

/1

Si A est nilpotente d'indice p , alors pour tout Q polynôme de $\mathbb{C}[X]$, QX^p est annulateur de A .

Réciproquement. On suppose que P est un polynôme annulateur de A nilpotente d'indice p .

6. Soit $X \in \text{Ker } A$, alors, en notant $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$,

$$0 = 0 \times X = P(A) \times X = \left(\sum_{k=0}^d a_k A^k \right) X = a_0 X + \sum_{k=1}^d \left(a_k A^{k-1} \times \underbrace{AX}_{=0} \right) = a_0 \cdot X = P(0) \cdot X$$

Par ailleurs A n'étant pas inversible, sinon, A^p le serait, $\text{Ker } A \neq \emptyset$.

On peut donc considérer $X \neq 0$. Donc nécessairement : $a_0 = P(0) = 0$.

/2

Ainsi 0 est racine de P .

Remarques !

- Autre méthode :
- Supposons que $P \wedge X^p = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que $UX^p + VP = 1$.
- En appliquant en $A : U(A)A^p + V(A)P(A) = I_n$.
- Or $A^p = P(A) = 0$, on a donc $0 = I_n$. Absurde.
- Donc $P \wedge X^p \neq 1$. Comme $(P \wedge X^p) | X^p$,
- nécessairement il existe $a(\leq p)$ tel que $X^a = P \wedge X^p$ et donc $X | X^a | P$.

7. Comme $Q(0) \neq 0$ alors $Q \wedge X^p = 1$.

Donc d'après Bézout : il existe $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tel que $UQ + VX^p = 1$ En composant en A :

$$U(A) \times Q(A) + V(A)A^p = I_n = U(A) \times Q(A)$$

car $A^p = 0$.

/2,5

Donc $Q(A)$ est inversible. Son inverse est un polynôme en A

On a alors $P(A) = 0 = A^m Q(A)$.

En multipliant par $U(A)$ à droite : $A^m = 0$. Et donc par définition de $p, m \geq p$.

/1

$P = X^p \times (X^{m-p}Q)$, donc P est un multiple de X^p .

8. En faisant la synthèse des deux questions précédentes :

/1,5

$\{T \in \mathbb{C}[X] \mid T(A) = 0\} = X^p \mathbb{C}[X]$

D. Racines carrées de matrices nilpotentes

On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de matrices nilpotentes.

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A .

1. C'est immédiat, $\text{tr}(A) = 0$.

On remarque que $C_2(A) = 3C_1(A)$ et $C_3(A) = -7C_1(A)$. Donc $\text{rg}(A) \leq 1$.

Par ailleurs, $C_1(A) \neq 0$, donc $\text{rg}(A) \geq 1$.

/1

$\text{tr}(A) = 0$ et $\text{rg}(A) = 1$

$A^2 = 0$,

/1

A est nilpotente ; son indice de nilpotence vaut 2.

2. Prenons la colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a alors $Y = AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $AY = A^2X = 0$.

Puis avec $Z = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $AZ = 0$.

Enfin, notons que (X, Y, Z) est une famille libre donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (X|Y|Z)$. Par blocs on a :

$$A \times P = (AX|AY|AZ) = (Y, 0, 0) = (X|Y|Z) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P \times \text{diag}(J_2, J_1)$$

Comme P est inversible :

/2

A est semblable à la matrice $\text{diag}(J_2, J_1)$.

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = A$.

On note ρ l'endomorphisme canoniquement associé à R .

3. Notons que $R^2 = A$, donc $AR = R^2 \times R = R^3 = R \times R^2 = RA$

Donc R et A commutent, donc

/1

u et ρ commutent

4. Soit $x \in \text{Ker } u$.

$$u(\rho(x)) = (u \circ \rho)(x) = (\rho \circ u)(x) = \rho(u(x)) = \rho(0) = 0$$

Donc $\rho(x) \in \text{Ker } u$. Ainsi $\text{Ker } u$ est stable par ρ .

Soit $y \in \text{Im } u$. Il existe $a \in E$ tel que $y = u(a)$

$$\rho(y) = \rho(u(a)) = (\rho \circ u)(a) = (u \circ \rho)(a) = u(\rho(a)).$$

Donc $\rho(y) \in \text{Im } u$. Ainsi $\text{Im } u$ est stable par ρ .

/2

$\text{Im } (u)$ et $\text{Ker } (u)$ sont stables par ρ

Par ailleurs, $\rho^4 = (\rho^2)^2 = u^2 = 0$

/1

ρ est nilpotent.

5. ρ est nilpotent dans un espace de dimension 3, donc $\rho^3 = 0$.

Ainsi $R^3 = 0$, et donc $RY = RAX = R^3X = 0$.

Puis comme Z définis plus haut est un éléments de $\text{Ker } A$.

Alors $RZ \in \text{Ker } A = \text{vect}(Y, Z)$. Il s'agit d'une base car $\dim(\text{Ker } A) = 2$ et (Y, Z) libre.

Donc il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $RZ = aY + bZ$.

Supposons que $RX = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$.

$$\text{Donc } R \times P = (RX|RY|RZ) = (\alpha X + \beta Y + \gamma Z | 0 | aY + bZ) = (X|Y|Z) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & a \\ \gamma & 0 & b \end{pmatrix}.$$

$$\text{Notons } R' = P^{-1}RP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & a \\ \gamma & 0 & b \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & a \\ \gamma & 0 & b \end{pmatrix}^2 = (R')^2 = P^{-1}RPP^{-1}RP = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = \text{diag}(J_2, J_1)$$

Le calcul explicite donne

$$(R')^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ \alpha\beta + a\gamma & 0 & ab \\ \gamma(\alpha + b) & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

On peut identifier avec $\text{diag}(J_2, J_1)$.

On a donc $b^2 = 0$, donc $b = 0$. De même $\alpha^2 = 0$, donc $\alpha = 0$. Puis $a\gamma = 1$.

$$\text{Donc } R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, avec une telle matrice, on trouve bien $R'^2 = \text{diag}(J_2, J_1)$.

Puis

$$\begin{aligned} R &= PR'P^{-1} = (X|Y|Z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} (X|Y|Z)^{-1} = (\beta Y + \gamma Z | 0 | \frac{1}{\gamma} Y) (X|Y|Z)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \beta + 3\gamma & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ 2\beta - \gamma & 0 & \frac{2}{\gamma} \\ \beta & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta + 3\gamma & 3\beta + 9\gamma - \frac{1}{\gamma} & -7\beta - 21\gamma + \frac{2}{\gamma} \\ 2\beta - \gamma & 6\beta - 3\gamma - \frac{2}{\gamma} & -14\beta + 7\gamma + \frac{4}{\gamma} \\ \beta & 3\beta - \frac{1}{\gamma} & -7\beta + \frac{2}{\gamma} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(où l'on a calculer P^{-1} avec l'algorithme de Gauss-Jordan)

/4

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{L'ensemble des racines carrées de } A \text{ est} \\ \left\{ \begin{pmatrix} \beta + 3\gamma & 3\beta + 9\gamma - \frac{1}{\gamma} & -7\beta - 21\gamma + \frac{2}{\gamma} \\ 2\beta - \gamma & 6\beta - 3\gamma - \frac{2}{\gamma} & -14\beta + 7\gamma + \frac{4}{\gamma} \\ \beta & 3\beta - \frac{1}{\gamma} & -7\beta + \frac{2}{\gamma} \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{C}^* \right\} \end{array}}$$

6. On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

Soit R une solution de cette équation. Alors, par simple calcul :

/1

$$\boxed{R^4 = J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R^6 = J_3^3 = 0}$$

Alors R est nilpotente, et on a vu que cela signifie que $R^3 = 0$.

Donc $R^4 = R \times R^3 = 0$. Ce qui est faux.

/2

$$\boxed{\text{Donc il n'existe aucune matrice } R, \text{ solution de } R^2 = J_3.}$$

7. En général, soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p . On se propose d'étudier l'équation $R^2 = V$.

(a) $R^{2p} = (R^2)^p = V^p = 0$.

Donc R est nilpotente. On note r son indice de nilpotence.

On a alors $R^{2p} = V^p = 0$, donc $r < 2p$. Et $R^{2p-2} = V^{p-1} \neq 0$, donc $r \geq 2p-2$.

Si $2p-1 > n$, alors $r > n-1$. Ce qui est impossible (nécessairement $r \leq n-1$).

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, si } 2p-1 > n, \text{ alors il n'existe aucune solution à l'équation } R^2 = V.}$$

(b) Soit $n \geq 3$. Soit $p = 2$, on a bien $2p - 1 = 3 \geq n$.

Soit $V = \text{diag}(J_2, O_{n-2})$. $V^2 = \text{diag}(J_2^2, O_{n-2}) = \text{diag}(O_2, O_{n-2}) = 0$.

Donc V est nilpotente d'indice $p = 2$.

Puis en suivant la réponse 5., on prend la matrice $(\beta = \gamma = 1)$, $W = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, O_{n-3} \right)$,

on trouve

$$W^2 = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2, O_{n-3} \right) = \text{diag}(J_2, O_{n-2}) = V$$

/3

Pour toute valeur de $n \geq 3$, $V = \text{diag}(J_2, O_{n-2})$ est nilpotente d'indice 2 et admet une racine carrée.

II. Généralisations et applications

On cherche dans cette partie à généraliser les résultats des sous-parties I.A et I.B.

A - Réduction des matrices nilpotentes

On suppose $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

1. Soit $y \in \text{Im } u$. $u(y) \in \text{Im } u$, donc nécessairement

/0,5

$\text{Im } (u)$ est stable par u .

On note $\tilde{u} : \text{Im } u \rightarrow \text{Im } u$, $x \mapsto u(x)$.

Alors pour tout $x \in \text{Im } u$, il existe $a \in E$ tel que $u(a) = x$.

$\tilde{u}^{p-1}(x) = u^{p-1}(x) = u^p(a) = 0$. Donc u est nilpotent d'indice $\leq p - 1$.

Par ailleurs, il existe x tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, car $u^{p-1} \neq 0$.

Et donc $\tilde{u}^{p-2}(u(x)) \neq 0$ et $u(x) \in \text{Im } u$. Donc l'indice de $\tilde{u} > p - 2$.

/1,5

L'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } (u)$ est nilpotent, d'indice de nilpotence égale à $p - 1$.

2. Pour tout vecteur x non nul de E , on note $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par les $(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$.

On rappelle que $u^p = 0$. Donc $C_u(x) = \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.

Soit $a \in C_u(x)$. Il existe $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ tel que $a = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$.

Donc $u(a) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^{k+1}(x) \in C_u(x)$.

$\{k \mid u^k(x) = 0\} \subset \mathbb{N}$, non vide (il contient p) donc admet un plus petit élément : $s(x)$.

On a alors, nécessairement, pour tout $k \geq s(x)$, $u^k(x) = u^{k-s(x)}(u^{s(x)}(x)) = 0$.

/1,5

$C_u(x)$ est stable par u et il existe un plus petit entier $s(x) \geq 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

3. Nous avons vu que $C_u(x) = \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.

Or pour tout $k \in \llbracket s(x), p-1 \rrbracket$, $u^k(x) = 0$. Donc $(x, \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est génératrice de $C_u(x)$.

Par ailleurs, supposons $\sum_{k=0}^{s(x)-1} \lambda_k u^k(x) = 0$.

Supposons que $\{k \in \llbracket 0, s(x) - 1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$ est non vide. Il admet un plus petit élément K .

Alors $\sum_{k=K}^{s(x)-1} \lambda_k u^k(x) = 0$.

En composant par $u^{s(x)-K-1}$, on trouve $\lambda_K u^{s(x)-1}(x) + \sum_{k=K+1}^{s(x)-1} \lambda_k \cdot 0 = 0$.

Or $\lambda_K \neq 0_{\mathbb{K}}$ et $u^{s(x)-1} \neq 0_E$. Impossible.

Donc $\{k \in \llbracket 0, s(x) - 1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\} = \emptyset$. Et la famille $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est libre.

/2

$(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_u(x)$

Le calcul est immédiat :

/1

La matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$ est $J_{s(x)}$.

4. On fait la démonstration par récurrence, comme indiqué.
Posons pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

/0,5

$\mathcal{Q}_p : \ll$ Si u est nilpotente d'indice p sur E , il existe $x_1, \dots, x_t$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$. $\gg$

— Pour $p = 1$, on considère u nilpotent d'indice 1. Alors $u = 0$.

En prenant une base quelconque de $E : (e_1, \dots, e_n)$,

on trouve, pour tout $i \in \mathbb{N}_n : C_u(e_i) = \{e_i\}$ car $u(e_i) = 0$.

Ainsi $E = \bigoplus_{i=1}^n C_u(e_i)$.

Donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie.

/1

— Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Supposons que $\mathcal{Q}_p$ est vraie.

Soit u , nilpotente d'indice $p+1$.

$\text{Im } u$ est stable par u . On note $\tilde{u} : \text{Im } u \rightarrow \text{Im } u, x \mapsto u(x)$.

Alors $\tilde{u}$ est linéaire.

Pour tout $x = u(a) \in \text{Im } u, \tilde{u}^p(x) = u^p(x) = u^{p+1}(a) = 0$ car $u^{p+1} = 0$.

Par ailleurs, il existe $b \in E$ tel que $u^p(b) \neq 0$, donc $\tilde{u}^{p-1}(u(b)) \neq 0$.

Ainsi, $\tilde{u}$ est nilpotente d'indice p .

On peut donc appliquer $\mathcal{P}_p$.

Et donc il existe $x_1, \dots, x_t \in \text{Im } u$ tel que $\text{Im } u = \bigoplus_{i=1}^t C_{\tilde{u}}(x_i)$.

Or pour tout $i \in \mathbb{N}_t$, il existe $a_i \in E$ tel que $x_i = u(a_i)$ et par suite

$$C_u(a_i) = \{u^k(a_i); k \in \mathbb{N}\} = \{a_i, x_i, u(x_i) \dots\} = \text{vect}\{\{a_i\} \cup C_{\tilde{u}}(x_i)\} = \text{vect}(a_i) + C_{\tilde{u}}(x_i)$$

Or cette somme est directe car une base de $C_u(a_i)$ est $(a_i, \underbrace{u(a_i), \dots, u^{s(a_i)-1}(a_i)}_{\text{générateurs de } C_{\tilde{u}}(x_i)})$.

Donc $C_u(a_i) = \text{vect}(a_i) \oplus C_{\tilde{u}}(x_i)$ Soit, pour tout $i \in \mathbb{N}_t$ $y_i \in C_u(a_i)$ tel que $\sum_{i=1}^t y_i = 0$.

Alors $\sum_{i=1}^t u(y_i) = u(0) = 0$. Or chaque $u(y_i) \in C_{\tilde{u}}(x_i)$,

donc comme la somme est directe : pour tout $i \in \mathbb{N}_t, u(y_i) = 0. y_i \in \text{Ker } u \cap C_u(a_i)$.

Puis $y_i = \sum_{k=0}^{s(a_i)-1} \lambda_k u^k(a_i)$, donc $u(y_i) = 0 = \sum_{k=1}^{s(a_i)-1} \lambda_{k-1} u^k(a_i)$.

Or la famille $(a_i, u(a_i), \dots, u^{s(a_i)-1}(a_i))$ est libre,

donc pour tout $k \leq s(a_i) - 1, \lambda_{k-1} = 0$.

Par conséquent $y_i = \lambda_{s(a_i)-1} u^{s(a_i)-1}(a_i) \in C_{\tilde{u}}(x_i)$.

Or, à nouveau la somme $\bigoplus_{i=1}^t C_{\tilde{u}}(x_i)$ est directe, donc $\forall i \in \mathbb{N}_t, y_i = 0$.

On a donc la somme directe $\bigoplus_{i=1}^t C_u(a_i)$.

Egalement, pour tout $i \in \mathbb{N}_t, u^{s(a_i)-1}(a_i) \neq 0$ et $u(u^{s(a_i)-1}(a_i)) = u^{s(a_i)}(a_i) = 0$.

Donc $u^{s(a_i)-1}(a_i) \in \text{Ker } u$.

On applique le théorème de la base incomplète,

comme $\dim(\text{Ker } u) = n - r$, il existe $n - r - t$ vecteurs $a_{t+1}, \dots, a_{n-r}$

tels que $(u^{s(a_1)-1}(a_1), \dots, u^{s(a_t)-1}(a_t), a_{t+1}, \dots, a_{n-r})$ soit une base de $\text{Ker } u$.

Pour tout $i \geq t+1, C_u(a_i) = \{a_i\}$ (car $u(a_i) = 0$).

Puis, comme précédemment, la somme est directe : $\bigoplus_{i=1}^{n-r} C_u(a_i)$.

En effet :

$$\sum_{i=1}^{n-r} y_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^t u(y_i) + 0 = 0 \Rightarrow u(y_i) = 0 \Rightarrow y_i \in \text{vect}\left(u^{s(a_i)-1}(a_i)\right)$$

Or la famille $(u^{s(a_1)-1}(a_1), \dots, u^{s(a_t)-1}(a_t), a_{t+1}, \dots, a_{n-r})$ est libre donc pour tout $i, y_i = 0$.

Et par ailleurs, (sommes directes)

$$\begin{aligned} \dim \bigoplus_{i=1}^{n-r} C_u(a_i) &= \sum_{i=1}^{n-r} \dim(C_u(a_i)) = \sum_{i=1}^t (1 + \dim(C_{\tilde{u}}(x_i))) + \sum_{i=t+1}^{n-r} 1 = t + \sum_{i=1}^t \dim(C_{\tilde{u}}(x_i)) + n - r - t \\ &= n - r + \dim(\bigoplus_{i=1}^t C_{\tilde{u}}(x_i)) = n - r + \dim(\text{Im } u) = n = \dim(E) \end{aligned}$$

Donc $E = \bigoplus_{i=1}^{n-r} C_u(a_i)$. Donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

/3,5

Si u est nilpotente d'indice p , il existe des vecteurs $x_1, \dots, x_t$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.

La matrice de u dans une base adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$ est $\text{diag}(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_t)})$.

B - Partitions d'entiers

On appelle partition de l'entier n toute suite finie $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ telle que

$$\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n.$$

On note Γ_n l'ensemble des partitions de l'entier n .

Ainsi, $\Gamma_1 = \{(1)\}$, $\Gamma_2 = \{(2), (1, 1)\}$, $\Gamma_3 = \{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\}$.

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice p et de rang r .

1. En reprenant la conclusion de la partie précédente,

Il existe $t \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_t \in E$ tel que $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.

On a alors (somme directe) :

$$n = \dim E = \sum_{i=1}^t \dim(C_u(x_i)) = \sum_{i=1}^t s(x_i)$$

En rangeant les nombres entiers $s(x_i)$ par ordre décroissant, puis en les notant $\alpha_1, \dots, \alpha_t$,
en exploitant la dernière réponse de la partie précédente :

/2

il existe une partition $\sigma = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ de n et une base $\mathcal{B}$ de E telle que
 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = N_{\sigma} = \text{diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_t})$.

2. Soit α un entier naturel non nul.

Soit u , l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{\alpha}$ canoniquement associée à J_{α} .

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}_{\alpha-1}$, $u(e_k) = e_{k+1}$ et $u(e_{\alpha}) = 0$ (où $(e_1, \dots, e_{\alpha})$ est la base can. de $\mathbb{C}^{\alpha}$).

Par récurrence (assez simple) $\forall j \in \mathbb{N}$, $u^j(e_k) = \begin{cases} e_{k+j} & \text{si } k+j \leq \alpha \\ 0 & \text{si } k+j > \alpha \end{cases}$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \text{rg}(J_{\alpha}^j) &= \dim(\text{Im } J_{\alpha}^j) = \dim(\text{Im } u^j) = \dim(\text{vect}(u^j(e_1), u^j(e_2), \dots, u^j(e_{\alpha}))) \\ &= \dim(\text{vect}(e_{j+1}, e_{j+2}, \dots, e_{j+\alpha})) = \alpha - (j+1) + 1 = \alpha - j \end{aligned}$$

avec la convention que $e_h = 0$ si $h > \alpha$.

/2

$\forall j \in \mathbb{N}$, le rang de J_{α}^j est égal à $\alpha - j$ si $j < \alpha$ et 0 sinon.
 J_{α} est nilpotente, d'indice de nilpotence égal à α .

3. Par récurrence sur m : $N_{\sigma}^m = (\text{diag}(J_{\alpha_1}^m, J_{\alpha_2}^m, \dots, J_{\alpha_t}^m))$.

— En effet, ceci est vrai, même pour $m = 0$ (et pour $m = 1$).

— Puis le produit par blocs, nous assure que si $N_{\sigma}^m = (\text{diag}(J_{\alpha_1}^m, J_{\alpha_2}^m, \dots, J_{\alpha_t}^m))$,
alors $N_{\sigma}^{m+1} = (\text{diag}(J_{\alpha_1}^{m+1}, J_{\alpha_2}^{m+1}, \dots, J_{\alpha_t}^{m+1})) \times N_{\sigma} = (\text{diag}(J_{\alpha_1}^{m+1}, J_{\alpha_2}^{m+1}, \dots, J_{\alpha_t}^{m+1}))$.

Et donc pour $m \geq \alpha_2$, $N_{\sigma}^m = (\text{diag}(J_{\alpha_1}^m, 0, \dots, 0))$,

car $\alpha_r \leq \alpha_2$ si $r \geq 2$. Et donc l'ordre de nilpotence de N_{σ} est le même que celui de J_{α_1} .

/2

$$p = \alpha_1$$

4. Les colonnes non nulles des matrices N_{σ}^j sont linéairement indépendantes.

En effet, elle possède toutes un et un seul un sur des lignes différentes les unes des autres.

Ainsi,

/1,5

$$\text{rg}(N_{\sigma}^j) = \sum_{i=1}^t \text{rg}(J_{\alpha_i}^j) = \sum_{i=1}^t \max((\alpha_i - j), 0) = \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j)$$

5. On sait que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^j) = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))^j = N_{\sigma}^j$.

Donc $\text{rg}(u^j) = \text{rg}(N_{\sigma}^j)$. En appliquant la formule précédente $\Lambda_j \subset \Lambda_{j-1}$:

$$\begin{aligned} d_j &= \text{rg}(u^{j-1}) - \text{rg}(u^j) = \sum_{i \in \Lambda_{j-1}} (\alpha_i - (j-1)) - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - (j-1)) - (\alpha_i - j) + \sum_{i \in \Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j} (\alpha_i - (j-1)) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_j} 1 + 0 = \text{card}(\Lambda_j) \end{aligned}$$

car si $i \in \Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j$, alors $\alpha_i \geq j-1$, et $\alpha_i < j$, donc $\alpha_i = j-1$.
On a donc par définition de $\Lambda_j = \{i \in \mathbb{N}_k \mid \alpha_i \geq j\}$, /2

d_j est égal au nombre de blocs J_α dont la taille α est supérieure ou égale à j .

6. Le nombre de blocs J_α est égale au nombre de blocs dont la taille est supérieure ou égale à 1.
Il est donc égal à $d_1 = \text{rg}(u^0) - \text{rg}(u^1) = \text{rg}(\text{id}) - \text{rg}(u) = n - r$ /1,5

$$k = n - r$$

7. On note $\Delta_j = \{i \in \mathbb{N}_k \mid \alpha_i = j\}$ On a la réunion disjointe : $\Delta_j \sqcup \Lambda_{j+1} = \Lambda_j$, donc

$$\text{card}(\Delta_j) + \text{card}(\Lambda_{j+1}) = \text{card}(\Lambda_j) \Rightarrow \text{card}(\Delta_j) = \text{card}(\Lambda_j) - \text{card}(\Lambda_{j+1}) = d_j - d_{j+1}$$

$$\text{card}(\Delta_j) = d_j - d_{j+1} = \text{rg}(u^{j-1}) - 2\text{rg}(u^j) + \text{rg}(u^{j+1})$$

C'est le nombre de blocs J_{α_i} de taille exactement égale à j .

8. Nécessairement, σ et σ' ont toute deux $k = n - r$ termes.

Puis nécessairement, il y a autant de blocs de taille j pour tout j .

Enfin, les blocs étant rangés par ordre décroissants :

$$\sigma = \sigma'$$

9. A chaque matrice nilpotente, on peut associer une unique partition σ de n tel que M est semblable à N_σ .

Il y a donc au plus autant de matrices nilpotentes non semblables que $\text{card}(\Gamma_n)$.

Réciproquement, pour deux permutations distinctes, on obtient deux matrices non semblables, /2

Le cardinal maximal d'un ensemble de matrices nilpotentes, toutes de même taille n , telles qu'il n'y ait pas dans cet ensemble deux matrices semblables est $\text{card}(\Gamma_n)$

C - Applications

1. Soient A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à

A .

On note que, par réduction liée :

$$\text{Im}(A) = \text{vect}(C_1(A), C_2(A), C_3(A), C_4(A), C_5(A)) = \text{vect}(C_2(A), C_4(A), C_5(A))$$

Or cette dernière famille est libre donc $r = \text{rg}(A) = 3$.

Egalement :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $p = 3$, indice de nilpotence de A .

D'après la question B.6., il y a donc $n - r = 5 - 3 = 2$ blocs à déterminer.

D'après la question B.3., le premier bloc est de taille 3.

Le second est nécessairement de taille 2, pour qu'on puisse avoir une partition de 5. /2

$$\text{On a } \sigma = (3, 2) \text{ et } N_\sigma = \text{diag}(J_3, J_2)$$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On note u l'endomorphisme canoniquement associé.

Alors, d'après II.A.5., il existe une base $\mathcal{B}'$, $t \in \mathbb{N}$ $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ tels que

$$M_{\mathcal{B}'} = \text{diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_t}).$$

Donc M est semblable à $\overline{M} := \text{diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_t})$.

Et donc $2M$ est semblable avec $2\overline{M}$ et M^T semblable à $\overline{M}^T$.

Supposons que $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

Notons $\mathcal{B}'' = (e'_1, \frac{1}{2}e'_2 \dots \frac{1}{2^{n-1}}e'_n) = (f_1, \dots, f_n)$.

Alors $\mathcal{B}''$ est une famille libre maximale de E , donc c'en est une base.

$$u(f_i) = u\left(\frac{1}{2^{i-1}}e'_i\right) = \frac{1}{2^{i-1}}u(e'_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } u(e'_i) = 0 \\ \frac{1}{2^{i-1}}e'_{i+1} = 2\frac{1}{2^i}e_{i+1} = 2f(f_{i+1}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(u) = 2\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = 2\overline{M}$.

Donc M est semblable avec $2\overline{M}$, elle même semblable avec $2M$.

/3

Par transitivité : M est semblable avec $2M$.

Considérons maintenant la base

$$\mathcal{B}^{(3)} = (e_{\alpha_1}, e_{\alpha_1-1}, \dots, e_1, e_{\alpha_2+\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_1+1}, \dots, e_n, \dots, e_{\alpha_1+\dots+\alpha_{t-1}+1}) = (g_1, \dots, g_n)$$

(On inverse l'ordre des vecteurs par paquets de $C_u(x_i)$.)

Alors pour $i \in \mathbb{N}_t$, $\mathcal{M}_{(e_{\alpha_1+\dots+\alpha_i}, e_{\alpha_1+\dots+\alpha_1-1}, \dots, e_{\alpha_1+\dots+\alpha_{i-1}+1})}(u|_{C_u(x_i)}) = J_{\alpha_i}^T$.

Et donc par blocs : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}^{(3)}}(u) = \overline{M}^T$.

Ainsi M est semblable à $\overline{M}^T$, elle même semblable à M^T .

/3

Par transitivité : M est semblable avec M^T .