**Devoir surveillé n°6**
CORRECTION

---

## Problème - Polynôme et Hermite

Dans l'ensemble de ce problème, on note pour tout entier $r$

$$\mathbb{K}_r[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leqslant r\},$$

l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $r$.

**I. Préliminaires**

Dans cette partie, certaines réponses ont été démontrées en cours. On demande néanmoins soit la même démonstration, soit une démonstration originale.

1. Soient $P$ et $Q$ deux polynômes non nuls à coefficients complexes.

   (a) On suppose, dans cette question, que $P$ et $Q$ sont premiers entre eux. On sait que $P|R$, donc il existe $P_2 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $R = PP_2$.
   Puis, $Q|R = P_2P$. Or $Q \wedge P = 1$, donc d'après le lemme de Gauss : $Q|P_2$.
   Par conséquent, il existe $Q_2 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_2 = QQ_2$.
   Finalement : $R = PP_2 = PQQ_2$ /2

   $$\boxed{P \wedge Q = 1, P|R, Q|R \quad \Longrightarrow \quad PQ|R}$$

   (b) On va démontrer la contraposée.
   On suppose que $P$ et $Q$ ne sont pas premiers entre eux et on note $R = P \wedge Q$.
   Donc $\deg R \geqslant 1$, $R$ admet donc une racine $\alpha$ dans $\mathbb{C}$ (Théorème de d'Alembert-Gauss).
   Donc $X - \alpha | R$, et donc $X - \alpha | P$ et $X - \alpha | Q$.
   Par conséquent, $P$ et $Q$ admettent (au moins) une racine complexe commune.
   La contraposée, équivalente, s'écrit : /2

   $$\boxed{\text{si } P \text{ et } Q \text{ n'ont aucune racine complexe commune alors } P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux.}}$$

2. La formule de dérivation d'un produit, donne

$$P' = \left(\prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}\right)' = \sum_{i=1}^{n} \Big((P_i^{\alpha_i})' \prod_{h \neq i} P_h^{\alpha_h}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha_i P_i' P_i^{\alpha_i - 1} \prod_{h \neq i} P_h^{\alpha_h}\Big)$$

On a donc

$$Q = \frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i P_i' \frac{P_i^{\alpha_i - 1} \prod_{h \neq i} P_h^{\alpha_h}}{\prod_{j=1}^{n} P_j^{\alpha_j}}\right)$$

/2

$$\boxed{Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i P_i'}{P_i}}$$

**II. Polynômes d'Hermite**

Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définies par récurrence par :

$$H_0 = 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = XH_n - H_n'$$

1. Premières propriétés.

   (a) On montre le résultat par récurrence.
   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ : « $\deg H_n = n$ et $[H_n]_n = 1$ ».
   — $H_0 = 1$, donc $\deg H_0 = 0$ et $[H_0]_0 = 1$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Alors $H_{n+1} = XH_n - H'_n$.
Or $\deg H'_n = \deg H_n - 1 = n-1$ et $\deg XH_n = \deg X + \deg H_n = 1+n$.
Donc $\deg(H_{n+1}) \leqslant \max(\deg XH_n, \deg H'_n) = \max(n+1, n-1) = n+1$.
Par ailleurs, par linéarité :

$$[H_{n+1}]_{n+1} = [XH_n]_{n+1} + [H'_n]_{n+1} = 1 \times [H_n]_n + 0 = 1$$

d'après $\mathcal{P}_n$.
Donc, on a $\deg H_{n+1} \geqslant 1$ et par double inégalité : $\deg H_{n+1} = n+1$
et au passage $[H_{n+1}]_{n+1} = 1$.
Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. /2

La récurrence est démontrée :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ H_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n.}$$

(b) Toujours par récurrence :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n$ :« $H_n(-X) = (-1)^n H_n$ ».
— $H_0 = 1$, donc $H_0(-X) = 1 = H_0$ et donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.
On compose par $-X$ (à l'intérieur) : $H_{n+1}(-X) = (-X)H_n(-X) + H'_n(-X)$ Or $H_n(-X) = (-1)^n H_n(X)$, d'après $\mathcal{Q}_n$.
Et si on dérive cette inégalité (dérivation d'une composition) :

$$(H_n(-X))' = (-X)' \times H'_n(-X) = -H'_n(-X) = (-1)^n H'_n(X)$$

Donc $H'_n(-X) = (-1)^{n+1} H'_n(X)$.
Ainsi, $H_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1}\big(XH_n(X) + H'_n(X)\big) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(X)$.
Donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie. /2

$$\boxed{H_n \text{ a la parité de } n}$$

**Piste de recherche...**

(c) *Dans 95% des situations comme celle-ci, le résultat ne se démontre pas par récurrence.*
*En revanche, il sert pour démontrer des résultats par récurrence par la suite. C'est pour cela qu'une telle relation s'appelle une relation de récurrence.*
*Néanmoins, nous sommes ici dans l'un des 5%...*

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}_n$ : « $H'_{n+1} = (n+1)H_n$ ».
— $H'_1 = (X)' = 1 = 1H_0$, donc $\mathcal{R}_0$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{R}_n$ est vraie.
Nous savons que $H_{n+2} = XH_{n+1} - H'_{n+1} = XH_{n+1} - (n+1)H_n$, d'après $\mathcal{R}_n$.
On peut dériver cette relation $H'_{n+2} = H_{n+1} + XH'_{n+1} - (n+1)H'_n$.
Puis, comme $H'_n = XH_n - H_{n+1}$, on a :

$$H'_{n+2} = H_{n+1} + XH'_{n+1} - (n+1)XH_n + (n+1)H_{n+1} = (n+2)H_{n+2} + X\underbrace{\left(H'_{n+1} - (n+1)H_n\right)}_{=0,\text{ d'après } \mathcal{R}_n}$$

Donc $\mathcal{R}_{n+1}$ est vraie. /2,5

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ H'_{n+1} = (n+1)H_n.}$$

(d) On a les résultats suivants : /1,5

$$\boxed{H_0 = 1, \quad H_1 = X, \quad H_2 = X^2 - 1, \quad H_3 = X^3 - 3X, \quad H_4 = X^4 - 6X^2 + 3}$$

(e) $H_4$ est unitaire, on a les valeurs :

$$\left\{\begin{array}{rcccc} a+b+c+d & = & -\sigma_1 & = & 0 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd & = & \sigma_2 & = & -4 \\ abc+abd+acd+bcd & = & -\sigma_3 & = & 0 \\ abcd & = & \sigma_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

On met au même dénominateur : $abcd$ :

$$S = \frac{(ab)^2 + (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 + (cd)^2}{abcd}$$

Or

$$\begin{aligned}(\sigma_2)^2 = \ & (ab)^2+(ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2+(cd)^2+\\ & 2(a^2bc+a^2bd+a^2cd+b^2ac+b^2ad+b^2cd+c^2ab+c^2ad+c^2bd+d^2ab+d^2ac+d^2bc)\\ & +6abcd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1\times\sigma_3 = \ & (a^2bc+a^2bd+a^2cd+b^2ac+b^2ad+b^2cd+c^2ab+c^2ad+c^2bd+d^2ab+d^2ac+d^2bc)\\ & +4abcd\end{aligned}$$

Donc /2

$$(ab)^2+(ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2+(cd)^2 = \sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$$

**Piste de recherche...**

*On aurait pu employer la technique vue en cours.*
*$s_{a,b,c,d}=(ab)^2+(ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2+(cd)^2$ est un polynôme symétrique, de degré 4.*
*Donc il existe $A,B,C,D,E$ tel que $s_{a,b,c,d}=A\sigma_1^4+B\sigma_1^2\sigma_2+C\sigma_2^2+D\sigma_1\sigma_3+E\sigma_4$.*
*Avec $a=1$, $b=-1$, $c=d=0$ : $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-1$ et $\sigma_4=0$ et donc $s_{1,-1,0,0}=1=C$.*
*Avec $1=a=b=-c=-d$ : $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-2$ et $\sigma_4=1$ et donc $s_{1,1,-1,-1}=6=4C+E$, donc $E=2$.*
*Avec $a=1$, $b=c=d=0$ : $\sigma_1=1$, $\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=0$ et donc $s_{1,0,0,0}=0=A$.*
*Avec $a=b=1$, $c=d=0$ : $\sigma_1=2$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=\sigma_4=0$ et $s_{1,1,0,0}=1=16A+4B+C$ donc $B=0$.*
*Avec $a=b=1=-c$, $d=0$ : $\sigma_1=1$, $\sigma_2=-1$, $\sigma_3=-1$, $\sigma_4=0$ et donc $s_{1,1,-1,0}=3=A-B+C-D$*
*et donc $D=A-B+C-3=0-\frac{1}{4}+1-3=-2+\frac{1}{4}$.*
*Ainsi : $s_{a,b,c,d}=0\sigma_1^4+0\sigma_1^2\sigma_2+1\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$*

Ainsi /1

$$\boxed{S=\frac{\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4}{\sigma_4}=\frac{16+2}{1}=18}$$

2. Base $(H_k)$. On fixe $n\in\mathbb{N}$.

(a) Soit $a_0,a_1,\dots a_n\in\mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^n a_kH_k=0$.

On note $A=\{k\in\mathbb{N}_n \mid a_k\neq 0\}$.
Si $A$ est non vide, comme il est majoré par $n$, il admet un plus petit élément $k_0$.

Alors $0=\displaystyle\sum_{k=0}^n a_kH_k=\sum_{k=0}^{k_0}a_kH_k=a_{k_0}H_{k_0}+\sum_{k=0}^{k_0-1}a_kH_k$.
Or $\deg a_{k_0}H_{k_0}=\deg H_{k_0}=k_0$, car $a_{k_0}\neq 0$.

et pour tout $k\leqslant k_0-1$, $\deg H_k<k_0$, donc $\deg a_{k_0}H_{k_0}+\displaystyle\sum_{k=0}^{k_0-1}a_kH_k=k_0$.

Or il s'agit du polynôme nul, de degré égal à $-\infty$.
On a une contradiction, donc $A=\emptyset$.

$$\boxed{\text{Si } \sum_{k=0}^n a_kH_k=0, \text{ alors pour tout } k\in[\![0,n]\!],\ a_k=0.}$$

*On dit que la famille $(H_0,H_1\dots H_n)$ est une famille libre.* /2

(b) On note pour tout entier $k$,

$\mathcal{H}_k$ :« il existe $(a_{0,k},a_{1,k},\dots a_{k,k})\in\mathbb{R}^{k+1}$ tel que $X^k=\displaystyle\sum_{i=0}^k a_{i,k}H_i$ ».

— $X^0=1=H_0$. Donc (avec $a_{0,0}=1$), on voit que $\mathcal{H}_0$ est vraie.
— Soit $k\in\mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{H}_i$ est vraie pour tout $i\in[\![0,k]\!]$.
On sait que $\deg H_{k+1}=k+1$ et que $H_{k+1}$ est unitaire.
Donc $H_{k+1}=X^{k+1}+T_k$, avec $T_k$, polynôme de degré inférieur ou égal à $k$.
Donc $T_k$ est une combinaison linéaire des polynômes $(1,X,X^2,\dots X^k)$.
Or chacun de ces polynômes $X^h$ est lui-même une combinaison linéaire de $(H_0,\dots H_h)$.
Donc, $T_k$ est une combinaison linéaire des polynômes $(H_0,\dots H_k)$.
Donc $X^{k+1}=H_{k+1}-T_k=H_{k+1}-(t_0H_0+t_1H_1+\dots t_kH_k)$.
Ainsi $\mathcal{H}_{k+1}$ est vérifiée.

Donc /2

$$\boxed{\text{Pour tout } k\in\mathbb{N}, \text{ il existe } (a_{0,k},a_{1,k},\dots a_{k,k})\in\mathbb{R}^{k+1} \text{ tel que } X^k=\sum_{i=0}^k a_{i,k}H_i.}$$

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Alors (commençons par l'existence) :

$$P = \sum_{k=0}^{n} [P]_k X^k = \sum_{k=0}^{n} [P]_k \left( \sum_{i=0}^{k} a_{i,k} H_i \right) = \sum_{i=0}^{n} \left( \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} [P]_k \right) H_i$$

Donc $P$ se décompose en combinaison linéaire de $H_i$. /1

Montrons maintenant l'unicité.

Supposons que $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i = \sum_{i=0}^{n} b_i H_i$, alors $\sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) H_i = 0$.

D'après la réponse à la question 2.(a) : pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i - b_i = 0$, i.e. $a_i = b_i$.

Il n'y a qu'un façon de décrire. /1

$$\boxed{\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \exists\ !(a_0, a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i \qquad (*)}$$

Puisqu'il y a unicité, on notera pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ :
pour tout $k \leqslant n$, $\big[[P]\big]_k$, le coefficient devant $H_k$ dans l'écriture $(*)$

(a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda P + Q = \lambda \left( \sum_{k=0}^{n} \big[[P]\big]_k H_k \right) + \sum_{k=0}^{n} \big[[Q]\big]_k H_k = \sum_{k=0}^{n} \left( \lambda \big[[P]\big]_k + \big[[Q]\big]_k \right) H_k$$

On peut identifier, puisqu'il y a unicité d'écriture /1

$$\boxed{\text{Pour tout } P, Q \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } k \leqslant n,\ \big[[\lambda P + Q]\big]_k = \lambda \big[[P]\big]_k + \big[[Q]\big]_k.}$$

(b) Soit $T \in \mathbb{K}[X]$, (la dérivation de la constante vaut 0, donc la somme commence en $k = 1$)

$$T' = \left( \sum_{k=0}^{n} \big[[T]\big]_k H_k \right)' = \sum_{k=1}^{n} \big[[T]\big]_k H_k' = \sum_{k=1}^{n} \big[[T]\big]_k k H_{k-1}$$

en exploitant la relation vue en question 1.(c).

On a donc, par identification : $\big[[T']\big]_{k-1} = k \big[[T]\big]_k$, ceci est vraie pour tout polynôme $T$. /1,5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On note alors pour tout $h \leqslant k$, $c_h = (k-h)! \big[[P^{(h)}]\big]_{k-h}$.

Alors, comme pour tout $T$, $\big[[T']\big]_{k-h-1} = (k-h)\big[[T]\big]_{k-h}$, en appliquant en $T = P^{(h)}$

$$\big[[P^{(h+1)}]\big]_{k-h-1} = (k-h) \big[[P^{(h)}]\big]_{k-h} \Rightarrow c_h = (k-h)! \times \frac{1}{k-h} \big[[P^{(h+1)}]\big]_{k-h-1} = (k-h-1)! \big[[P^{(h+1)}]\big]_{k-h-1} = c_{h+1}$$

On a donc une suite contante et $k! \big[[P]\big]_k = c_0 = c_k = \big[[P^{(k)}]\big]_0$. /1,5

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ et tout } k \leqslant n,\ \big[[P]\big]_k = \frac{1}{k!} \big[[P^{(k)}]\big]_0.}$$

Cela donne la formule de Taylor-Hermite /1

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{\big[[P^{(k)}]\big]_0}{k!} H_k}$$

(c) $P^{(3)} = 3 \times 2 \times 1 = 6 = 6H_0$ donc $\big[[P^3]\big]_0 = 6$.
$P^{(2)} = 6X + 2 = 6H_1 + 2H_0$, donc $\big[[P^2]\big]_0 = 2$
$P' = 3X^2 + 2X + 1 = 3H_2 + 2H_1 + H_0$, donc $\big[[P']\big]_0 = 4$
Enfin, on sait que $\big[[P]\big]_3 = 1$, car $P$ est unitaire : /2

$$\boxed{P = X^3 + X^2 + X + 1 = +\frac{4}{1!} H_1 + \frac{2}{2!} H_2 + \frac{6}{3!} H_3 = H_0 + 4H_1 + H_2 + H_3}$$

3. Etude des racines de $H_n$.
On note $p$, le nombre de racines réelles distincts de $H_n$, d'ordre de multiplicité impair.
Précisément, on note $a_1 < a_2 < \dots a_p$, ces $p$ racines rangées en ordre croissant.

On note $S = 1$, si $p = 0$ et $S = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)$, si $p \geqslant 1$

(a) Si $p < n$, alors $\deg(S) = p < n$, et donc $S^{(n)} = 0$ et donc /1

$$\boxed{[[S]]_n = \frac{1}{n!}[[S^{(n)}]]_0 = 0}$$

(b) Les racines de $S \times H_n$ sont exactement les racines de $H_n$, elles sont de multiplicité paire.
En effet :
• soit elles sont d'ordre impair pour $H_n$ et d'ordre 1 pour $S$, donc d'ordre pair.
• soit elles sont d'ordre pair pour $H_n$ et d'ordre 0 pour $S$, donc d'ordre pair.
Donc $x \mapsto S(x)H_n(x)$ ne change pas de signe pour $x \in \mathbb{R}$.
Par ailleurs, comme le coefficient de $H_n$ vaut 1, de même pour $S$, donc il vaut 1 pour $S \times H_n$,
Et donc $S(x)H_n(x) \sim 1x^{n+p} \to +\infty$, le signe de $S(x)H_n(x)$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$. /2

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ S(x)H_n(x) \geqslant 0.}$$

(c) On note, pour tout polynôme $P$ et entier $k \in \mathbb{N}$ :

$$a_k(P) = \lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} P(t)H_k(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

On a alors, en faisant une intégration par parties :

$$\int_{-X}^{X} \underbrace{P'(t)}_{v'(t)}\underbrace{H_k(t)e^{-\frac{t^2}{2}}}_{u(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[P(t)H_k(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_{-X}^{X} - \int_{-X}^{X} P(t)\big(H_k'(t) - tH_k(t)\big)e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

Or $H_k'(X) - XH_k(X) = -H_{k+1}$, d'après la relation initiale.
En passant à la limite $X \to +\infty$, comme par croissance comparée : $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t)H_k(t)e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$ :

$$a_k(P') = a_{k+1}(P)$$

On trouve alors

$$a_n(S) = a_{n-1}(S') = \cdots = a_0(S^{(n)})$$

Or si $p < n$, $S^{(n)} = 0$ et donc $a_0(S^{(n)}) = 0 = a_n(S)$.
Or $\varphi : x \mapsto S(x)H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue, donc admet une primitive $\Phi$.
Puis $S(x)H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \geqslant 0$, donc $\Phi$ est croissante,
donc pour tout $0 \leqslant x \leqslant X$, $0 \leqslant \Phi(x) - \Phi(0) \leqslant \Phi(X) - \Phi(0)$.
Et comme $a_n(S) = 0$, on trouve $\lim\limits_{X \to \infty} \Phi(X) - \Phi(-X) = 2 \lim\limits_{X \to +\infty} \Phi(X) - \Phi(0) = 0$
et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \Phi(0)$.
Par conséquent, $\Phi$ est constante, et donc $\Phi' = \varphi = 0$ car $\varphi$ est continue.
Alors $SH_n$ est le polynôme nul. Ce qui est absurde.
Donc nécessairement $p \geqslant n$. /4

$$\boxed{H_n \text{ a } n \text{ racines réelles distinctes.}}$$

**Remarques !**
*D'où vient l'idée d'un tel calcul ?*
*En fait $a_n$ est le calcul classique par produit scalaire associé à des familles de polynômes orthogonaux, comme ces polynômes de Hermite.*
*On montre en réalité que :*

$$a_n(P) = n!\sqrt{2\pi}\,[[P]]_n$$

*On voit donc la contradiction entre $[[S]]_n = 0$ et $a_n(S) > 0$.*

### III. Interpolation d'Hermite

Soient $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $p$ un entier naturel non nul.
On considère également 3 familles : $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_p}$, une famille de $p$ éléments distincts de $I$ ; $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_p}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{N}_p}$ deux familles de $p$ réels quelconques.
On cherche à caractériser $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall\, i \in \mathbb{N}_p, P(x_i) = a_i \text{ et } P'(x_i) = b_i\}$.

1. Existence du polynôme interpolateur de Hermite

   Pour tout entier $i \in \mathbb{N}_p$, on considère $Q_i = \displaystyle\prod_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j}\right)^2$.

(a) Soit $i, k \in \mathbb{N}_p$. C'est immédiat : /1

$$\boxed{Q_i(x_k) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}}$$

(b) Soit $i \in \mathbb{N}_p$. On dérive $Q_i$ :

$$Q_i' = \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \frac{2(X - x_j)}{(x_i - x_j)^2} \prod_{h \in \mathbb{N}_p \setminus \{i,j\}} \left(\frac{X - x_h}{x_i - x_h}\right)^2$$

Pour $k \neq i$, (un des $j$ vaut $k$) :

$$Q_i'(x_k) = \underbrace{\frac{2(x_k - x_j)}{(x_i - x_j)^2} \prod_{h \in \mathbb{N}_p \setminus \{i,j\}} \left(\frac{x_k - x_h}{x_i - x_h}\right)^2}_{j=k} + \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i,k\}} \frac{2}{(x_i - x_j)^2} \prod_{h \in \mathbb{N}_p \setminus \{i,j\}} \left(\frac{x_k - x_h}{x_i - x_h}\right)^2}_{j \neq k}$$

Dans le premier cas, on trouve $x_k - x_j$, alors que $k = j$.
Dans le second cas, $h \neq j$, donc il peut être égal à $k$ et donc $x_h - x_k = 0$, dans ce sous-cas, ainsi le produit est nul. Il ne reste donc que le premier terme (en $j = k$).

$$Q_i'(x_k) = 0$$

Et pour $k = i$ : $x_k = x_i$ et donc le produit vaut 1,

$$Q_i'(x_k) = \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \frac{2}{(x_i - x_j)^2}$$

Bilan /3

$$\boxed{Q_i'(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ \displaystyle\sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \frac{2}{(x_i - x_j)^2} & \text{si } i = k \end{cases}}$$

(c) Considérons donc $\overline{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i) b_i\right] Q_i$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}_p$,

$$\begin{aligned} \overline{P}(x_k) &= \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(x_k - x_i))\, a_i + (x_k - x_i) b_i\right] Q_i(x_k) \\ &= \left[(1 - Q_k'(x_k)(x_k - x_k))\, a_k + (x_k - x_k) b_k\right] = a_k \end{aligned}$$

car, comme $Q_i(x_k) = \delta_{i,k}$, il ne reste dans la somme que la situation $i = k$. /1

- Puis, on dérive $\overline{P}$ : /1

$$\overline{P}' = \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i) b_i\right] Q_i' + \sum_{i=1}^{p} \left[(-Q_i'(x_i))\, a_i + b_i\right] Q_i$$

Comme précédent, en $x_k$, comme $Q_i(x_k) = 0$ si $i \neq k$ :

$$\begin{aligned} \overline{P}'(x_k) &= \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(x_k - x_i))\, a_i + (x_k - x_i) b_i\right] Q_i'(x_k) + \sum_{i=1}^{p} \left[(-Q_i'(x_i))\, a_i + b_i\right] Q_i(x_k) \\ &= \left[(1 - Q_k'(x_k)(x_k - x_k))\, a_k + (x_k - x_k) b_k\right] Q_k'(x_k) + \left[(-Q_k'(x_k))\, a_k + b_k\right] \\ &= a_k Q_k'(x_k) - Q_k'(x_k) a_k + b_k = b_k \end{aligned}$$

/1

$$\boxed{\text{Donc } \overline{P} \in \mathcal{H}.}$$

2. Description de $\mathcal{H}$. On fixe $P \in \mathcal{H}$.

(a) On a les équivalences :

$$\begin{aligned} Q \in \mathcal{H} &\iff \forall\, i \in \mathbb{N}_p, Q(x_i) = a_i = P(x_i) \text{ et } Q'(x_i) = b_i = P'(x_i) \\ &\iff \forall\, i \in \mathbb{N}_p, (Q - P)(x_i) = 0 \text{ et } (Q - P)'(x_i) = 0 \\ &\iff \forall\, i \in \mathbb{N}_p, x_i \text{ est racine double de } Q - P \\ &\iff \prod_{i=1}^{p} (X - x_i)^2 | P - Q \end{aligned}$$

car les $(X - x_i)$ sont premiers entre eux. */2*

$$\boxed{\text{Avec } T = \prod_{i=1}^{p} (X - x_i)^2,\ Q \in \mathcal{H} \Leftrightarrow T | Q - P}$$

(b) Puisqu'on a équivalence, on a une double inclusion */1*

$$\boxed{\mathcal{H} = \{P + ST, S \in \mathbb{K}[X]\}}$$

(c) Dans la question 1, on a trouvé une solution.
On notera que, par définition $Q_i$ est de degré $2(n-1)$ (carré d'un polynôme de degré $n-1$).
Puis $\overline{P}$ est une somme de produit de polynôme de degré 1 par des $Q_i$, donc $\deg \overline{P} \leqslant 2n-1$.
Tout autre élément de $\mathcal{H}$ est donc de la forme $P + ST$, avec $\deg T = 2n$, donc sauf pour $S = 0$, $\deg(\overline{P} + ST) \geqslant 2n$. */1*

$$\boxed{\text{Par conséquent } \mathcal{H} \cap \mathbb{R}_{2n-1}[X] = \{\overline{P}\} \text{ où } \overline{P} \text{ est défini à la première question.}}$$

3. Applications.
Déterminer le polynôme d'interpolation de Hermite lorsque $p = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $b_1 = -1$, $b_2 = -2$

$$Q_1 = \left(\frac{X-1}{-2}\right)^2 = \frac{1}{4}(X-1)^2 \qquad Q_1' = \frac{1}{2}(X-1) \qquad \text{et} \qquad Q_1'(x_1) = -1$$

$$Q_2 = \left(\frac{X+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(X+1)^2 \qquad Q_2' = \frac{1}{2}(X+1) \qquad \text{et} \qquad Q_2'(x_2) = 1$$

Puis, $\overline{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i) b_i\right] Q_i$, donc

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= [(1 + 1(X+1))1 + (X+1)(-1)]Q_1 + [(1 - 1(X-1)) \times 0 + (X-1) \times (-2)]Q_2 \\
&= [X + 2 - X - 1]Q_1 + [2 - 2X]Q_2 = \frac{1}{4}(X-1)^2 + \frac{1}{2}(X-1)(X+1)^2 \\
&= \frac{1}{4}(X-1)[(X-1) + (2X^2 + 4X + 2)] = \frac{1}{4}(X-1)(2X^2 + 5X + 1)
\end{aligned}$$

*/2*

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{4}(X-1)(2X^2 + 5X + 1)}$$