

Devoir surveillé n°5

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (*) voire (**).

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.**

BON COURAGE

Problème - Polynôme et Hermite

Dans l'ensemble de ce problème, on note pour tout entier r

$$\mathbb{K}_r[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq r\},$$

l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à r .

Le but de ce problème est d'étudier deux apports *distincts* de CHARLES HERMITE à l'algèbre des polynômes. Les parties II et III sont indépendantes.

I. Préliminaires

Dans cette partie, certaines réponses ont été démontrées en cours. On demande néanmoins soit la même démonstration, soit une démonstration originale.

- Soient P et Q deux polynômes non nuls à coefficients complexes.
 - On suppose, dans cette question, que P et Q sont premiers entre eux. Démontrer que si P et Q divisent un troisième polynôme R à coefficients complexes, alors il est de même du polynôme PQ .
 - Démontrer que si P et Q n'ont aucune racine complexe commune alors P et Q sont premiers entre eux.
- Soit $(P_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ une famille de n entiers.

On considère le polynôme $P = \prod_{i=1}^n P_i^{\alpha_i}$ et la fraction rationnelle $Q = \frac{P'}{P}$.

Démontrer que $Q = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i P'_i}{P_i}$.

II. Polynômes d'Hermite

Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définies par récurrence par :

$$H_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = XH_n - H'_n$$

- Premières propriétés.
 - Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n .
 - Etudier la parité de H_n .
 - Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H'_{n+1} = (n+1)H_n$.
 - Calculer la liste des polynômes (H_i) , pour $i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$
 - On note a, b, c et d les racines de H_4 (dans $\mathbb{C}$) en tenant compte de leur multiplicité.
Calculer $S = \frac{ab}{cd} + \frac{ac}{bd} + \frac{ad}{bc} + \frac{bc}{ad} + \frac{bd}{ac} + \frac{cd}{ab}$.

- Base (H_k) . On fixe $n \in \mathbb{N}$.

- En exploitant les degrés, montrer que si $\sum_{k=0}^n a_k H_k = 0$, alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = 0$.

- (b) Montrer, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, qu'il existe $(a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{k,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que $X^k = \sum_{i=0}^k a_{i,k} H_i$
- (c) Dédire des deux questions précédentes :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \exists !(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } P = \sum_{i=0}^n a_i H_i \quad (*)$$

Puisqu'il y a unicité, on notera pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

pour tout $k \leq n$, $[[P]]_k$, le coefficient devant H_k dans l'écriture (*)

- (a) Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
Pour tout $k \leq n$, $[[\lambda P + Q]]_k = \lambda [[P]]_k + [[Q]]_k$
- (b) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et tout $k \leq n$, $[[P]]_k = \frac{1}{k!} [[P^{(k)}]]_0$.
En déduire une expression de P de type TAYLOR-HERMITE
On pourra commencer par démontrer que pour tout $T \in \mathbb{R}[X]$, $[[T']]_{k-1} = k [[T]]_k$.
- (c) Appliquer cette formule au polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$

3. Etude des racines de H_n .

On note p , le nombre de racines réelles distincts de H_n , d'ordre de multiplicité impair.

Précisément, on note $a_1 < a_2 < \dots < a_p$, ces p racines rangées en ordre croissant.

On note $S = 1$, si $p = 0$ et $S = \prod_{i=1}^p (X - a_i)$, si $p \geq 1$

- (a) Démontrer que si $p < n$, alors $[[S]]_n = 0$
- (b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) \geq 0$.
- (c) (*) En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

III. Interpolation d'Hermite

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, p un entier naturel non nul.

On considère également 3 familles : $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_p}$, une famille de p éléments distincts de I ; $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_p}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{N}_p}$ deux familles de p réels quelconques.

On cherche à caractériser $\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall i \in \mathbb{N}_p, P(x_i) = a_i \text{ et } P'(x_i) = b_i\}$.

1. Existence du polynôme interpolateur de HERMITE

Pour tout entier $i \in \mathbb{N}_p$, on considère $Q_i = \prod_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)^2$.

- (a) Soit $i \in \mathbb{N}_p$. Calculer $Q_i(x_k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}_p$.
- (b) Soit $i \in \mathbb{N}_p$. Calculer $Q'_i(x_k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}_p$.
(On notera en particulier que $Q_i(x_k) = 0$ si $i \neq k$.)
- (c) Démontrer que le polynôme

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^p [(1 - Q'_i(x_i)(X - x_i)) a_i + (X - x_i) b_i] Q_i$$

est un élément de $\mathcal{H}$.

2. Description de $\mathcal{H}$

- (a) Soit $P \in \mathcal{H}$.
Montrer qu'il existe un polynôme unitaire T (à déterminer) tel qu'on ait l'équivalence

$$Q \in \mathcal{H} \iff T|Q - P$$

- (b) En déduire la description totale de $\mathcal{H}$.

- (c) Que vaut $\mathcal{H} \cap \mathbb{R}_{2n-1}[X]$?

3. Applications.

Déterminer le polynôme d'interpolation de HERMITE lorsque $p = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $b_1 = -1$, $b_2 = -2$.