Devoir à la maison n°11

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole ($*$) voire ($**$). La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

On reprend les notations du problème 8.

III. Représentation linéaire du groupe symétrique

L'objectif de cette partie est de donner un très succinct aperçu de la riche théorie liant tableaux de Young et représentations du groupe symétrique.
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $\dim(E) = k \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathbb{C}u$, le sous-espace vectoriel de E engendré par $u \in E$ ($\mathbb{C}u = \text{vect}_{\mathbb{C}}(u)$).
On note $GL(E)$, le groupe linéaire de E, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires inversibles de E dans E, muni de la composition comme loi du groupe. Comme d'habitude, on identifie $GL(E)$ au groupe multiplicatif des matrices carrées d'ordre k complexes et inversibles. L'identité de $GL(E)$ est notée I.

Une *représentation (linéaire)* de dimension $k \in \mathbb{N}^*$ de $\mathfrak{S}_n$ est une application

$$\Psi : \mathfrak{S}_n \to GL(E)$$

où E est dimension k et telle que

$$\forall\ \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n,\ \Psi(\sigma\tau) = \Psi(\sigma) \circ \Psi(\tau)$$

1. Montrer que si Ψ est une représentation de $\mathfrak{S}_n$, alors $\Psi(e) = I$ et $\Psi(\sigma^{-1}) = (\Psi(\sigma))^{-1}$.
2. Soit $n \geqslant 2$.
Démontrer que $\mathfrak{S}_n$ admet exactement deux représentation de dimension 1 que l'on explicitera.
On notera que dans ce cas là, $\Psi(\sigma) \in GL(\mathbb{C})$, on a donc pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\Psi(\sigma) : x(\in \mathbb{C}) \mapsto y(\in \mathbb{C})$, linéaire i.e. : que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\exists\ \alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\Psi(\sigma)(x) = \alpha x$.

Une représentation $\Psi : \mathfrak{S}_n \to GL(E)$ est réductible s'il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $0 < \dim F < \dim E$ et F stable par $\Psi(\sigma)$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Dans ce cas, on définit $\Psi_F : \mathfrak{S}_n \to GL(F)$, où $\Psi_F(\sigma) = \Psi(\sigma)_{|F}$.
Ψ_F est alors une représentation de dimension $\dim F$ de $\mathfrak{S}_n$.
Une représentation Ψ est *irréductible* si elle n'est pas réductible.

On dit que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E, si :
— $(\cdot|\cdot) : E^2 \to \mathbb{C}$
— $\forall\ x, y \in E : (x|y) = \overline{(y|x)}$ (conjugué)
— $\forall\ x, y_1, y_2 \in E,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ (x|\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(x|y_1) + \lambda_2(x|y_2)$
— $\forall\ x \in E,\ (x|x) \geqslant 0$
— $\forall\ x \in E,\ (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. On suppose que E admet un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.
   (a) Montrer que $\forall\ x_1, x_2, y \in E,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2|y) = \overline{\lambda_1}(x_1|y) + \overline{\lambda_2}(x_2|y)$
   (b) Soit $\Psi : \mathfrak{S}_n \to GL(E)$, une représentation.
   Montrer que : $\langle\cdot|\cdot\rangle$ tel que $\forall\ u, v \in E$, $\langle u|v\rangle = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \big(\Psi(\sigma)(u)|\Psi(\sigma)(v)\big)$ est un produit scalaire.

   Supposons que Ψ soit réductible, avec $F \subset E$, $0 < \dim F < \dim E$ et Ψ_F représentation de σ.
   Soit $F^\perp = \{x \in E \mid \forall\ y \in F, \langle x, y\rangle = 0\}$.

   (c) On admet que F, sev de E admet une base orthonormale $(u_1, \dots u_k)$.
   C'est une base de F et en outre : $\forall\ i, j \in \mathbb{N}_k$, $\langle u|v\rangle = \delta_{i,j}$.
   Montrer que $E = F \oplus F^\perp$.
   On pourra chercher l'écriture de la projection de $u \in E$ sur F.

(d) Montrer que $F^{\perp}$ est stable par $\Psi(\sigma)$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(e) En déduire que l'on peut décomposer $E = \oplus_{i\in I} E_i$
avec pour tout $i \in I$, E_i est stable par $\Psi(\sigma)$ (pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$) et Ψ_{E_i} est irréductible.
On peut faire une récurrence sur la dimension de E

4. Représentation standard.
On considère l'application

$$S : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ \sigma & \longmapsto & S(\sigma) \end{array} \quad \text{tel que } S(\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie aisément que S est une représentation de dimension n de $\mathfrak{S}_n$ appelée *représentation standard.*

(a) Soit $H = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$.
Démontrer que H est stable par $S(\sigma)$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(b) En déduire que S est réductible.

(c) Montrer que si $x = (x_1, \dots x_n) \in H$ avec $\forall\ i \neq j$, $x_i \neq x_j$, alors

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{C} S(\sigma)(x) = H \qquad \textit{i.e.} \quad \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\left(\Psi(\sigma)(x); \sigma \in \mathfrak{S}_n\right) = H$$

(d) Montrer que S_H est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$

5. Représentations isomorphes.
Deux représentations linéaires de dimension k, Ψ_1 et Ψ_2 sont *isomorphes* s'il existe une matrice inversible P d'ordre k tel que

$$\forall\ \sigma \in \mathfrak{S}_n, \qquad \Psi_1(\sigma) = P^{-1} \times \Psi_2(\sigma) \times P$$

On admet le difficile et profond résultat suivant : l'ensemble $\mathfrak{E}$ des représentants irréductibles (à isomorphismes près) de $\mathfrak{S}_n$ peut être paramétré de la façon suivante : $\mathfrak{E} = \{\Psi_\lambda, \lambda \vdash n\}$ où Ψ_λ est une représentation de dimension d_λ, le nombre de tableau de Young de forme λ.

(a) Déterminer toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$ (à isomorphisme près).
On explicitera les matrices de la représentation de dimension 2 dans une base que l'on choisira.

(b) Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer explicitement une partition $\lambda \vdash n$ telle que $d_\lambda = n - 1$.
Déterminer le nombre et la dimension des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$ et de $\mathfrak{S}_5$ (à isomorphismes près).