Devoir à la maison n°8
CORRECTION

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que pour tout $x \geqslant 0$, $P(x) \geqslant 0$.

Piste de recherche...

Ici, il s'agit de forme quadratique, on est parfois démunit car il n'y a pas de linéarité.
*Il existe une relation **à connaitre**, dite identitée de* Lagrange *à connaitre dans le cas de somme de carrés :*
Le produit de deux sommes de carrés est également une somme de carrés.

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC-BD)^2+(AD+BC)^2$$

Pour démontrer ce résultat, il suffit de développer les deux côtés de l'égalité. Mais cela n'indique pas comment s'en souvenir...
Une méthode préconisée consiste à interpréter ce résultat d'une autre façon : soit avec des déterminants de matrices (on verra cela plus tard), soit avec des modules de nombres complexes :

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = |A+iB|^2\times|C+iD|^2 = \left|(A+iB)(C+iD)\right|^2 = \left|(AC-BD)+i(AD+BC)\right|^2 = (AC-BD)^2+(AD+BC)^2$$

Et avec un peu d'originalité, avec $B' = \sqrt{X}B$ et $D' = \sqrt{X}D$

$$(A^2+XB^2)(C^2+XD^2) = (A^2+(B')^2)(C^2+(D')^2) = (AC-XBD)^2+X(AD+BC)^2$$

On a donc une sorte de stabilité : le produit de deux polynômes de la forme A^2+XB^2 donne un polynôme qui peut s'écrire également sous cette forme.

Dans $\mathbb{C}[X]$, P est scindé.
On note $\mathcal{Z}(P)$, l'ensemble des racines de P et $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
On a $z \in \mathbb{C}^+$ est racine d'ordre n de P ssi $\overline{z} \in \mathbb{C}^-$ est racine d'ordre n de P (car $P \in \mathbb{R}[X]$).

$$P = \prod_{z\in\mathcal{Z}(P)\cap\mathbb{R}_+^*}(X-z)^{\nu_z} \times \prod_{z\in\mathcal{Z}(P)\cap\mathbb{R}_-}(X-z)^{\nu_z} \times \prod_{z\in\mathcal{Z}(Q)\cap\mathbb{C}^+}(X-z)^{n_z}\times(X-\overline{z})^{\nu_z}$$

Etudions chacun de ces familles de produits.

1. Si $z_0 \in \mathcal{Z}(P)\cap\mathbb{R}_+^*$.
   Pour x au voisinage de $z_0(>0)$, $P(x) \geqslant 0$,
   Or $P(x) \underset{x\to z_0}{\sim} (x-z_0)^{n_{z_0}} \times T(z_0)$, de signe constant (où T est tel que $P = (X-z_0)^{n_0}T$).
   Donc nécessairement : n_{z_0} est pair, sinon $P(z_0^+)$ et $P(z_0^-)$ sont de signe contraire.
   Ainsi, pour tout $z \in \mathcal{Z}(Q)\cap\mathbb{R}$, $2|n_z$ et donc
   $$(X-z_0)^{\nu_{z_0}} = (A_{z_0}^2 + XB_{z_0}^2)^{\nu_{z_0}/2}$$
   avec $A_{z_0} = X - z_0$ et $B_{z_0} = 0$.
2. Si $z_0 \in \mathcal{Z}(P)\cap\mathbb{R}_-$.
   $$X - z_0 = X + (-z_0) = X + (\sqrt{-z_0})^2 = A_{z_0}^2 + XB_{z_0}^2$$
   avec $A_{z_0} = \sqrt{-z_0}$ et $B_{z_0} = 1$
3. Si $z_0 \in \mathcal{Z}(P)\cap\mathbb{C}^+$.
   $$(X-z_0)(X-\overline{z_0}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)X + |z_0|^2 = (X-|z_0|)^2 + 2X(|z_0|^2 - \mathrm{Re}(z_0)) = A_{z_0}^2 + XB_{z_0}^2$$
   avec $A_{z_0} = X - |z_0|$ et $B_{z_0} = \sqrt{2(|z_0|^2 - \mathrm{Re}(z_0)}$ (on a bien $|z_0| > \mathrm{Re}(z_0)$).

Ainsi, dans tous les cas, on peut écrire P comme produit de polynôme de la forme $(A_z^2 + XB_z^2)$.

$$P = \prod_{z\in\mathcal{Z}(P)\cap\mathbb{R}_+^*}(A_z+XB_z)^{\nu_z/2} \times \prod_{z\in\mathcal{Z}(P)\cap\mathbb{R}_-}(A_z+XB_z)^{\nu_z} \times \prod_{z\in\mathcal{Z}(Q)\cap\mathbb{C}^+}(A_z+XB_z)^{\nu_z}$$

Reste à montrer par récurrence, le résultat final.

$$\mathcal{P}_n : \ll \text{ Si } P = \prod_{i=1}^{n}(A_i + XB_i) \text{ alors } \exists\ \hat{A},\hat{B} \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } P = \hat{A}^2 + X\hat{B}^2.\ \gg$$

— $\mathcal{P}_1$ est évident.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Soit $P = \prod_{i=1}^{n+1}(A_i + XB_i) = (\hat{A}^2 + X\hat{B}^2) \times (A_{n+1} + XB_{n+1})$, d'après $\mathcal{P}_n$.
Donc $P = (\hat{A}A_{n+1} - X\hat{B}B_{n+1})^2 + X(\hat{A}B_{n+1} + \hat{B}A_{n+1})^2$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On applique alors $\mathcal{P}_{\sum_{z\in\mathcal{Z}(P)\cap\mathbb{R}_+^*}\frac{\nu_z}{2}+\sum_{z\in\mathcal{Z}(P)\cap\mathbb{R}_-}\nu_z+\sum_{z\in\mathcal{Z}(P)\cap\mathbb{C}^+}\nu_z}$ à P et on peut affirmer :

$$\boxed{\text{il existe } A, B \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } P = A^2 + XB^2.}$$

Remarques !
On peut appliquer une méthode équivalente pour prouver :
$$P \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0 \Longrightarrow \exists\, A, B \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = A^2 + B^2$$

Exercice 3

Soit $P = X^n + aX + b \in \mathbb{C}[X]$ (avec $b \neq 0$).
On note $x_1, x_2, \ldots x_n$ les racines de P comptées avec multiplicités.

Remarques !
Ce nombre $\Delta = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)^2$ est ce que l'on appelle le discriminant du polynôme P.
Il est nul si et seulement si P possède (au moins) une racine multiple.
S'il est négatif, alors P possède nécessairement des racines complexes (conjugués).
Cela nous rappelle le discriminant d'un polynôme de degré 2. Comme il est symétrique en les racines de P, il s'exprime toujours directement en fonction des coefficients de P.
Ici, P est un polynôme particulier, donc le calcul est simplifié.
Pour $n = 2$, on trouve $\Delta = -(2^2b + (-1)^1a^2) = a^2 - 4b$, classique discriminant du $X^2 + aX + b\ldots$

Notons que $P = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$, normalisé (puisque P est unitaire).
Et donc $P' = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(X - x_j)$ et donc $P'(x_i) = \prod_{j\neq i}(x_i - x_j)$.
Et par ailleurs, $P' = nX^{n-1} + a$ et donc $P'(x_i) = nx_i^{n-1} + a$.
Ainsi $x_iP'(x_i) = nx_i^n + ax_i = n(-ax_i - b) + ax_i = x_ia(1-n) - nb$ car $P(x_i) = 0$.
Donc $\dfrac{x_i}{a(1-n)}P(x_i) = x_i - \frac{nb}{(1-n)a}$ Enfin,

$$\begin{aligned}
\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{a^n(1-n)^n} \times \prod_{i=1}^{n} P'(x_i) &= \prod_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{nb}{(1-n)a}\right) = (-1)^n P\left(\frac{nb}{(1-n)a}\right)\\
\prod_{i=1}^{n} P'(x_i) &= \frac{(1-n)^n a^n}{(-1)^n b}(-1)^n\left(\frac{(nb)^n}{(1-n)^n a^n} + a\frac{nb}{(1-n)a} + b\right)\\
&= n^n b^{n-1} + n(1-n)^{n-1}a^n + (1-n)^n a^n = n^n b^{n-1} + (1-n)^{n-1}a^n(n+1-n)
\end{aligned}$$

car $b = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i$. Et

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} P'(x_i) &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_i - x_j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j<i}(x_i - x_j) \times \prod_{j>i}(x_i - x_j)\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j<i}(x_i - x_j) \times \prod_{i=1}^{n}\prod_{j>i}(x_i - x_j) = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j) \times \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)\\
&= (-1)^{\binom{n}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_j - x_i) \times \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)\\
&= (-1)^{n(n-1)/2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)^2
\end{aligned}$$

On trouve donc
$$\boxed{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2}(n^n b^{n-1} + (1-n)^{n-1}a^n)}$$

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\geqslant 2$.

1. On suppose que P est scindé, on peut supposer que $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{\nu_i}$ avec $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$.

   On a alors (cours - mais à savoir refaire)

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\nu_i}{X - \alpha_i}$$

   Cette fraction est elle-même dérivable :

$$\frac{P''P - (P')^2}{P^2} = \left(\frac{P'}{P}\right)' = \sum_{i=1}^{r} \frac{\nu_i}{(X - \alpha_i)^2}$$

   Considérons x une racine de P', mais pas de P.

$$\frac{P''(x)P(x) - \big(P'(x)\big)^2}{P^2(x)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{-\nu_i}{(x - \alpha_i)^2}$$

   Or $P'(x) = 0$, $P^2(x) > 0$, et pour tout $i \in \mathbb{N}_r$ $\nu_i > 0$, $(x - \alpha_i)^2 > 0$, alors

$$\boxed{P''(x)P(x) < 0}$$

2. Soient x_1 et x_2 deux racines consécutives de P.
   $\tilde{P} : t \mapsto P(t)$ est continue sur $]x_1, x_2[$, donc $J := \overline{P}(]x_1, x_2[)$ est un intervalle (TVI).
   et $\tilde{P}$ ne s'annule pas sur $]x_1, x_2[$ (x_1 et x_2 sont deux racines consécutives),
   donc nécessairement $0 \notin J$ et $\tilde{P}$ est de signe constant.
   Ainsi pour tout $h > 0$ et $h < x_2 - x_1$ $\tilde{P}(x_1 + h)$ et $P(x_2 - h)$ sont du même signe.

   et donc $\dfrac{\tilde{P}(x_1 + h) - \overbrace{\tilde{P}(x_1)}^{=0}}{h}$ et $\dfrac{\tilde{P}(x_2 - h) - \overbrace{\tilde{P}(x_2)}^{=0}}{-h}$ sont de signe opposé.
   $\forall\ h \in]0, x_2 - x_1[$, $\dfrac{\tilde{P}(x_1 + h) - \tilde{P}(x_1)}{h} \times \dfrac{\tilde{P}(x_2 - h) - \tilde{P}(x_2)}{-h} < 0$.
   On peut passer à la limite $h \to 0$ puisque P est dérivable en x_1 et x_2 :
   Cette limite est $P'(x_1)P'(x_2)$. (Le passage à la limite élargit les inégalités)

$$\boxed{P'(x_1)P'(x_2) \leqslant 0}$$

3. Soient $a < b$ tels que $P - a$ et $P - b$ sont scindés.
   - On note $x_1, \ldots x_r$ les racines de $P - a$, d'ordre $\nu_1 \ldots \nu_r$ respectivement ($\sum_{i=1}^{r} \nu_i = n$).
     On suppose également (SPDG) que $x_1 < x_2 < \ldots x_r$ (racines rangées par ordre croissant).
     Alors pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, x_i est racine de $(P - a)' = P'$ d'ordre $\nu_i - 1$ (même si $\nu_i - 1 = 0$).
     Puis d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(y_i) = 0$.

   Ainsi : P' admet $n - 1$ racines : chaque y_i d'ordre 1 et chaque x_i d'ordre $\nu_i - 1$.
   Donc, déjà, P' est scindé :

$$P' = \lambda \prod_{i=1}^{r-1} (X - y_i) \times \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{\nu_i - 1}$$

   - Puis considérons $x \in \mathcal{Z}(P') = \mathcal{Z}((P - a)') = \mathcal{Z}((P - b)')$ car $(P - a)' = (P - b)' = P$.
     On ne peut avoir à la fois $(P - a)(x) = 0$ et $(P - b)(x) = 0$, car on aurait $a = P(x) = b$.
     Donc ou bien $(P - a)(x) \neq 0$ ou bien $(P - b)(x) \neq 0$.
     Dans ce cas, d'après 1., $(P - a)''(x)(P - a)(x) < 0$, ou $(P - b)''(x)(P - b)(x) < 0$.
     Donc nécessairement $P''(x) = (P - a)''(x) = (P - a)''(x)$ est non nul.

   Ainsi, x n'est pas racine de P'', donc n'est pas racine d'ordre $\geqslant 2$ de P'.

$$\boxed{P' \text{ est scindé à racines simples.}}$$

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et v une application linéaire de E vérifiant : $v^2 + v + \mathrm{Id}_E = 0$.
(Ici, $v^2 = v \circ v$ et v est linéaire signifie : $\forall\, x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v(\lambda x + \mu y) = \lambda v(x) + \mu v(y)$.)

1. Soit $x \in E$, non nul.
   Donc $(x, v(x))$ lié si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(x) = \lambda x$ (car $x \neq 0$).
   Supposons, donc, $(x, v(x))$ lié et considérons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(x) = \lambda x$.
   Puis $v^2(x) = v(v(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x) = \lambda^2 x$.
   Et par ailleurs, $v^2(x) = -v(x) - \mathrm{id}(x) = (-\lambda - 1)x$.
   Ainsi $(\lambda^2 + \lambda + 1)x = 0$. Or x est non nul, donc $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.
   Or le polynôme $X^2 + X + 1$ n'admet que deux racines complexes non réelles : j et j^2.
   Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$.
   On a une contradiction
   $$\boxed{(x, v(x)) \text{ est une famille libre.}}$$

2. Soient $x, y \in E$ tels que $(x, y, v(x))$ soit une famille libre.
   Alors $(x, y, v(x), v(y))$ est une famille liée
   si et seulement si $v(y)$ est une combinaison linéaire de la famille libre $(x, y, v(x))$.
   Supposons donc qu'il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $v(y) = \lambda x + \mu y + \nu v(x)$.
   On compose par v :
   $$-v(y) - y = v^2(y) = v\big(\lambda x + \mu y + \nu v(x)\big) = \lambda v(x) + \mu v(y) + \nu v^2(x) = -\nu x + (\lambda - \nu)v(x) + \mu v(y)$$
   Donc, en associant les $v(y)$. Et par ailleurs, en exploitant la relation initiale :
   $$(1+\mu)v(y) = \nu x - y + (\nu - \lambda)v(x) = (1+\mu)\lambda x + (1+\mu)\mu y + (1+\mu)\nu v(y)$$
   Enfin, la famille $(x, y, v(x))$ est libre, donc on peut identifier :
   $$\begin{cases} \nu &= (1+\mu)\lambda \\ -1 &= (1+\mu)\mu \\ \nu - \lambda &= (1+\mu)\nu \end{cases}$$
   On obtient alors $\mu^2 + \mu + 1 = 0$. C'est impossible, puisque μ est un nombre réel.
   $$\boxed{(x, y, v(x), v(y)) \text{ est une famille libre.}}$$

3. Soit e_1 un vecteur non nul de E.
   On considère ensuite $e_3 = v(e_1)$. D'après la question 1, (e_1, e_3) est libre.
   On peut trouver e_2 tel que (e_1, e_2, e_3) libre. Il suffit de compléter avec un vecteur d'un espace supplémentaire à $\mathrm{vect}(e_1, e_3)$.
   D'après la question 2, (e_1, e_2, e_3, e_4) (avec $e_4 = v(e_2)$) est une famille libre de E.
   Comme $\dim E = 4$, alors cette famille est une base.
   $$\boxed{\text{Donc il existe une base } (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ de } E \text{ qui vérifie } e_3 = v(e_1) \text{ et } e_4 = v(e_2).}$$
   On a alors
   $$\boxed{v(e_3) = v^2(e_1) = -e_1 - v(e_1) = -e_1 - e_3 \text{ et de même } v(e_4) = -e_1 - e_4.}$$

Remarques !

Nous verrons que cela signifie que la matrice de v dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
Elle est diagonale par blocs