Devoir à la maison n°8

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$. La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1

TOUT LE MONDE!!
Recopiez et si besoin, améliorez la correction de la première partie du problème du DS5. (Entropie. Etude de fonctions)

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que pour tout $x \geqslant 0$, $P(x) \geqslant 0$.
Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + XB^2$.

Exercice 3

Soit $P = X^n + aX + b \in \mathbb{C}[X]$ (avec $b \neq 0$).
On note $x_1, x_2, \dots x_n$ les racines de P comptées avec multiplicités.
Montrer que $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2}(n^n b^{n-1} + (1-n)^{n-1} a^n)$.

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\geqslant 2$.

1. On suppose que P est scindé et on considère x tel que $P'(x) = 0$ et $P(x) \neq 0$.
   En utilisant $\dfrac{P'}{P}$, montrer que $P''(x)P(x) < 0$.
2. Soient x_1 et x_2 deux racines consécutives de P. Montrer que $P'(x_1)P'(x_2) \leqslant 0$
3. Soient $a < b$ tels que $P - a$ et $P - b$ sont scindés.
   Montrer que P' est scindé à racines simples.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et v une application linéaire de E vérifiant : $v^2 + v + \mathrm{Id}_E = 0$.
(Ici, $v^2 = v \circ v$ et v est linéaire signifie : $\forall\ x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v(\lambda x + \mu y) = \lambda v(x) + \mu v(y)$.)

1. Soit $x \in E$, non nul. Montrer que $(x, v(x))$ est une famille libre.
2. Soient $x, y \in E$ tels que $(x, y, v(x))$ soit une famille libre.
   Montrer que $(x, y, v(x), v(y))$ est une famille libre.
3. On suppose que $\dim E = 4$. Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E qui vérifie $e_3 = v(e_1)$ et $e_4 = v(e_2)$.
   Exprimer alors $v(e_3)$ et $v(e_4)$ dans cette base (e_1, e_2, e_3, e_4).