MPSI 3 - Fermat 31.03.20
2019-2020

Devoir à la maison n°10
CORRECTION

Exercice 1

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r, A et B deux points distincts de $\mathcal{C}$.

1. A, B et C sont sur $\mathcal{C}$, donc à une distance r du centre du repère (et du cercle) O. Donc $|a| = |b| = |m| = r$.

$$\boxed{a = re^{i\alpha} \qquad b = re^{i\beta} \qquad m = re^{it}}$$

$$z = \frac{r(e^{it} - e^{i\beta})}{r(e^{it} - e^{i\alpha})} = \frac{e^{i(\frac{t+\alpha}{2})} 2i \sin(\frac{t-\alpha}{2})}{e^{i(\frac{t+\beta}{2})} 2i \sin(\frac{t-\beta}{2})}$$

En divisant par $-2i$, numérateur et dénominateur :

$$\boxed{z = e^{i(\beta-\alpha)/2} \frac{\sin \frac{\beta-t}{2}}{\sin \frac{\alpha-t}{2}}}$$

2. Si M est un point du cercle distincts de A et de B, d'après la formule vue en cours :

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \arg \frac{b-m}{a-m} = \arg e^{i(\beta-\alpha)/2} \frac{\sin \frac{\beta-t}{2}}{\sin \frac{\alpha-t}{2}} = \arg e^{i(\beta-\alpha)/2} = \frac{\beta-\alpha}{2} [2\pi]$$

car $\dfrac{\sin \frac{\beta-t}{2}}{\sin \frac{\alpha-t}{2}} \in \mathbb{R}$. Et par ailleurs $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg \dfrac{b-0}{a-0} = \arg e^{i(\beta-\alpha)} = \beta - \alpha [2\pi]$.
Donc

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est un point du cercle de diamètre } [AB] \text{, distincts de } A \text{ et de } B \text{ alors } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)}$$

3. Réciproquement, on suppose que $2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \beta - \alpha\ [2\pi]$.
On note $z = \dfrac{m-b}{m-a}$, on a donc (écriture polaire) :

$$\frac{m-b}{m-a} = z = \rho e^{i(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})} = \rho e^{\frac{\beta-\alpha}{2} i}$$

Donc par manipulation homographique :

$$m = \frac{b - a\rho e^{\frac{\beta-\alpha}{2} i}}{1 - \rho e^{\frac{\beta-\alpha}{2} i}}$$

Or $b = re^{i\beta}$, $a = re^{i\alpha}$, donc $m = \dfrac{re^{i\beta} - r\rho e^{\frac{\beta+\alpha}{2} i}}{1 - \rho e^{\frac{\beta-\alpha}{2} i}}$.

$$|m| = r\frac{|e^{i\beta}(1 - \rho e^{\frac{\alpha-\beta}{2} i})|}{|1 - \rho e^{\frac{\beta-\alpha}{2}}|} = r|e^{i\beta}| \times \left| \frac{\overline{1 - \rho e^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}}{1 - \rho e^{\frac{\beta-\alpha}{2}}} \right| = r$$

$$\boxed{M \in \mathcal{C}.}$$

4. Soit $M(m)$ tel que $2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \leqslant \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ $[2\pi]$.
Soit $M' \in (OM) \cap \mathcal{C}$ (où C est le cercle de centre O passant par A et B.)
Alors $2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \leqslant \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 2\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right)$ $[2\pi]$ Donc $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \leqslant \left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right)$ $[2\pi]$.
Les triangles ABM et ABM' ont même base, mais un angle au sommet plus petit pour le premier triangle.
Les angles en base sont donc plus grand pour le premier triangle et donc M est plus loin de A et B que M'.
La réciproque étant vraie :

$$\boxed{\text{L'ensemble } \left\{M(m) \mid 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \leqslant \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\ [2\pi]\right\} \text{ est l'exterieur du disque } \mathcal{C}}.$$

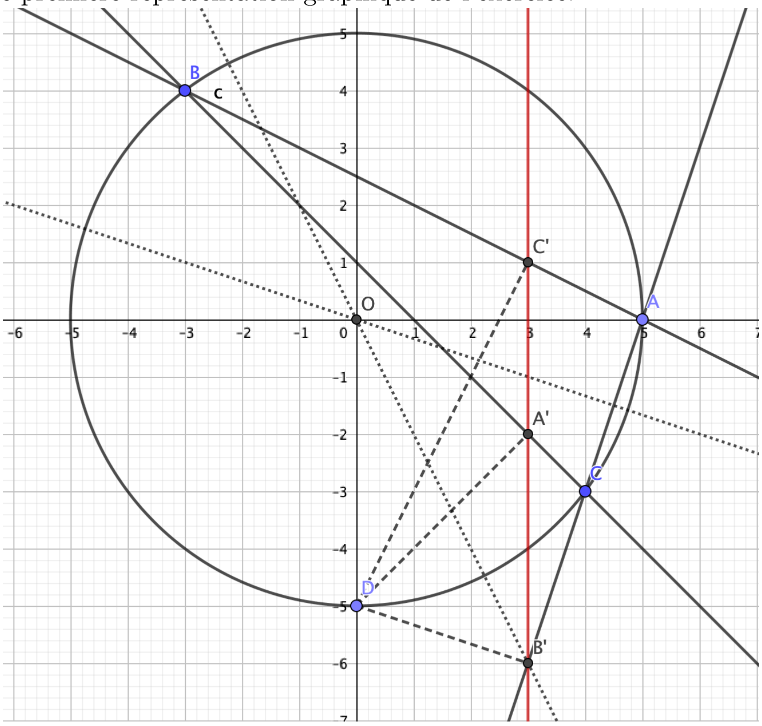
5. Dans un autre repère othonormé, par translation, nous pourrions placer le centre du cercle considéré au centre du repère.

$$\boxed{\text{Les résultats seraient alors inchangés par translation.}}$$

Exercice 2

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Une première représentation graphique de l'exercice.



(a) On a $OA = |z_A - z_O| = |5-0| = 5$, $OB = |z_B - z_O| = |-3+4i| = \sqrt{9+16} = 5 = OC = OD$.

$$\boxed{A, B, C \text{ et } D \text{ sont sur le même cercle } \Gamma \text{ de centre } O \text{ et de rayon } 5.}$$

On note A', B', C' les projetés orthogonaux de D respectivement sur les droites $(BC), (AC)$ et (AB).

(b) On a les équivalences :

$$M(x,y) \in (AC) \iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-5 & -1 \\ y & -3 \end{vmatrix} = 0 \iff -3x + y + 15 = 0$$

$$M(x,y) \in \Delta_B \iff \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff (x, y+5) \cdot (-1, -3) = 0 \iff -x - 3y - 15 = 0$$

$$\boxed{\text{On a les équations suivantes : } (AC) : -3x + y + 15 = 0 \text{ et } \Delta_B : x + 3y + 15 = 0}$$

$B'(x', y')$, le point d'intersection de ces deux droites est donc la solution du système :

$$\begin{cases} -3x & +y & = -15 \\ x+ & 3y & = -15 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 3 \\ y & = -6 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } B' \text{ sont } (3, -6).}$$

(c) De même. On a les équivalences :

$$M(x,y) \in (BC) \iff \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x+3 & 7 \\ y-4 & -7 \end{vmatrix} = 0 \iff -7x - 7y + 7 = 0$$

$$M(x,y) \in \Delta_A \iff \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff (x, y+5) \cdot (7, -7) = 0 \iff 7x - 7y - 35 = 0$$

$$\boxed{\text{On a les équations suivantes : } (BC) : x + y - 1 = 0 \text{ et } \Delta_B : x - y - 5 = 0}$$

$A'(x', y')$, le point d'intersection de ces deux droites est donc la solution du système :

$$\begin{cases} x & +y & = 1 \\ x & -y & = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 3 \\ y & = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } A' \text{ sont } (3,-2).}$$

On a les équivalences :

$$M(x,y) \in (AB) \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-5 & -8 \\ y & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 4x+8y-20=0$$

$$M(x,y) \in \Delta_C \Longleftrightarrow \overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Longleftrightarrow (x,y+5)\cdot(-8,4) = 0 \Longleftrightarrow -8x+4y+20=0$$

$$\boxed{\text{On a les équations suivantes : } (AB) : x+2y-5=0 \text{ et } \Delta_B : -2x+y+5=0}$$

$C'(x',y')$, le point d'intersection de ces deux droites est donc la solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rrl} x & +2y & =5 \\ -2x & +y & =-5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x & =3 \\ y & =1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } C' \text{ sont } (3,1).}$$

$$\boxed{\text{On vérifie que } A',B',C' \text{ sont alignés : ils sont sur la même droite, celle d'équation } x=3.}$$

2. On considère maintenant $S(1,0)$ et M_1, M_2, M_3 trois points du cercle trigonométrique $\mathcal{C}(O,1)$, deux à deux distincts, et distincts de S. On note e^{ia}, e^{ib}, e^{ic} les affixes des points M_1, M_2, M_3 avec a, b, c, réels.
On note H_1, H_2, H_3 (d'affixes h_1, h_2, h_3) les projetés orthogonaux de S sur $(M_2M_3), (M_1M_3), (M_1M_2)$ respectivement.

(a) D'après le cours

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \operatorname{Re}(z' \times \overline{z}) \qquad \text{et} \qquad \det(\vec{u},\vec{v}) = \operatorname{Im}(z' \times \overline{z})}$$

(b) H_1 est l'élément de (S_2S_3) et de la droite orthogonale à (S_2S_3) passant par S.
Donc h_1 est la solution du système

$$\left\{\begin{array}{l} \det(\overrightarrow{S_2S_3},\overrightarrow{S_2H_1}) = 0 \\ \overrightarrow{S_2S_3}\cdot\overrightarrow{SH_1} = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{Im}\big((h_1-e^{ib})\overline{(e^{ic}-e^{ib})}\big) = 0 \\ \operatorname{Re}\big((h_1-1)\overline{(e^{ic}-e^{ib})}\big) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \operatorname{Im}(h_1(e^{-ic}-e^{-ib}) & = \operatorname{Im}(e^{ib}e^{-ic}-1) & = \sin(b-c) \\ \operatorname{Re}(h_1(e^{-ic}-e^{-ib}) & = \operatorname{Re}(e^{-ic}-e^{-ib}) & = \cos c - \cos b \end{array}\right.$$

Déterminer un système d'équations caractérisant h_1 faisant intervenir b et c.

(c) Connaissant la partie réelle et imaginaire, on en déduit que

$$h_1(e^{-ic}-e^{-ib}) = \cos c - \cos b + i\sin(b-c)$$

Cette équation a une unique solution : $\frac{\cos c - \cos b + i\sin(b-c)}{e^{-ic}-e^{-ib}}$.
Or

$$(e^{ib}+e^{ic}-e^{i(b+c)}+1)(e^{-ic}-e^{-ib}) = e^{i(b-c)}+1-e^{ib}+e^{-ic}-1-e^{i(c-b)}+e^{ic}-e^{-ib} = 2\cos c - 2\cos b + 2i\sin(b-c)$$

$$\boxed{\text{Donc } h_1 = \tfrac{1}{2}(e^{ib}+e^{ic}-e^{i(b+c)}+1).}$$

(d) De même, par expression symétrique, on trouve que
$h_2 = \frac{1}{2}(e^{ia}+e^{ic}-e^{i(a+c)}+1)$ et $h_3 = \frac{1}{2}(e^{ia}+e^{ib}-e^{i(a+b)}+1)$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{H_1H_2},\overrightarrow{H_1H_3}) &= \operatorname{Im}\left(\tfrac{1}{2}(e^{ia}-e^{ic}-e^{i(a+b)}+e^{i(b+c)})\tfrac{1}{2}\overline{(e^{ia}-e^{ib}-e^{i(a+c)}+e^{i(b+c)})}\right) \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\left((e^{ia}-e^{ic}-e^{i(a+b)}+e^{i(b+c)})(e^{-ia}-e^{-ib}-e^{-i(a+c)}+e^{-i(b+c)})\right) \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\big(1-e^{i(a-b)}-e^{-ic}+e^{i(a-b-c)}-e^{i(c-a)}+e^{i(c-b)}+e^{-ia}-e^{ib} \\
&\qquad -e^{ib}+e^{ia}+e^{i(b-c)}-e^{i(a-c)}+e^{-i(a-b-c)}-e^{ic}-e^{-i(a-b)}+1\big) \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\big(2-2\cos(a-b)-2\cos c+2\cos(a-b-c)-2\cos(c-a) \\
&\qquad +2\cos(b-c)+2\cos a+2\cos b\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } H_1, H_2, H_3 \text{ sont alignés.}}$$

Remarques !

Cette seconde question est une généralisation de la question précédente. S correspond au point D, et les points M_i généralisent les points A, B et C.

3. On considère 4 points cocyclique 2 à 2 distincts, notés A, B, C et D. Ce dernier étant celui dont on regarde les projetés. On note Ω, le centre du cercle.

   $\boxed{\text{On considère alors } s \text{ la similitude qui transforme } S(1,0) \text{ en } D \text{ et } O \text{ (centre du repère) en } \Omega.}$

   Comme s est une similitude, elle conserve les cercles, donc les antécédents par s de A, B et C sont sur le cercle de centre O et rayon OD.
   Soient M_1, M_2 et M_3 tels que $s(M_1) = A$, $s(M_2) = B$ et $s(M_3) = C$.
   On applique alors les résultats de la question 2, H_1, H_2 et H_3 sont alignés.
   s conserve les alignements, donc $s(H_1)$, $s(H_2)$ et $s(H_3)$ sont alignés.
   Il s'agit exactement des projetés orthogonaux de D sur (BC), sur (AC) et (AB) respectivement.
   En effet, $s\big((M_1M_2)\big) = (AB)$ et $s\big((DH_3)\big) = \Delta_3$, par conservation de l'orthogonalité.
   L'image étant unique, $s(H_3) = (AB) \cap \Delta_3 = C'$ (notation de la question 1)
   $(\ldots)$

Exercice 3

Soient n et p deux entiers non nuls. Soient $a_1, a_2, \ldots a_p$, p entiers tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i = n$.

On note $E = \{f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p \mid \forall\, i \in \mathbb{N}_p, \mathrm{card}(f^{-1}(i)) = a_i\}$.
On a la bijection simple (la réunion est disjointe) :

$$f \in E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}_p}^{\oplus} f^{-1}(i) = E \text{ et } \mathrm{card}(f^{-1}(i)) = a_i$$

Par récurrence sur p, on note

$$\mathcal{P}_p \qquad :\ll \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ et } E \text{ fini de cardinal } n \text{ et } a_1, \ldots a_p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{p} a_i = n,$$
$$\text{il y a } \frac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_p!} \text{ applications de } E \text{ dans } \mathbb{N}_p \text{ tel que } \forall\, i \in \mathbb{N}_p,\ \mathrm{card}(f^{-1}(i)) = a_i. \gg$$

— En effet, si $p = 1$, il n'y a qu'une application, $f : \mathbb{N}_n \to \{a_1\}$ c'est $f : k \mapsto a_1$.
  et dans ce cas $a_1 = n$ et donc $\frac{n!}{a_1!} = \frac{n!}{n!} = 1$.
— Puis, si $p = 2$, il s'agit de décomposer $\mathbb{N}_n$ en deux parties distinctes, une de a_1 éléments et l'autre de $n - a_1 = a_2$ éléments.
  C'est le classique coefficient binomial : $\displaystyle\binom{n}{a_1} = \frac{n!}{a_1!a_2!}$
— Soit $p \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $\mathcal{P}_1 \ldots \mathcal{P}_{p-1}$ sont vraies.
  Une fonction de E est alors bijectivement définie par :
  — le choix d'un ensemble de a_p éléments à partir de E : $\binom{n}{a_p}$ possibilités.
  — PUIS le choix de $\tilde{f}$ vérifiant les mêmes conditions à partir d'un ensemble à $n - a_p$ éléments comme origine et un ensemble à $p - 1$ éléments comme but.
    D'après $\mathcal{P}_{n-a_p}$ ($n - a_p > 0$ -sinon problème), il y a $\frac{(n-a_p)!}{a_1!a_2!\ldots a_{p-1}!}$ telles applications $\tilde{f}$.
  Il y a donc un nombre d'applications égal à :

$$\binom{n}{a_p} \times \frac{(n-a_p)!}{a_1!a_2!\ldots a_{p-1}!} = \frac{n!(n-a_p)!}{a_p!(n-a_p)!a_1!\ldots a_{p-1}!} = \frac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_p!}$$

  Donc $\mathcal{P}_p$ est vraie.

$\boxed{\text{Le nombre d'applications de } \mathbb{N}_n \text{ dans } \mathbb{N}_p \text{ telles que } \forall\, i \in \mathbb{N}_p,\ i \text{ a exactement } a_i \text{ antécédents est } \dfrac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_p!}}$

Remarques !

Ce nombre s'appelle le coefficient multinomial.
On le note $\binom{n}{a_1, a_2, \ldots a_p}$.
On le retrouve par exemple dans le multinôme de Newton. C'est le coefficients devant $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_p^{a_p}$ *lorsqu'on développe* $(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n$

Exercice 4

Soit E un ensemble à np éléments ($n, p \in \mathbb{N}^*$).
On note $P_{n,p}$ le nombre de partitions de E en n parties à p éléments.
Une partition de E en n parties de p éléments est comptée exactement n fois, lorsqu'on considère :

— le choix d'un ensemble F de p éléments parmi les np éléments possibles : $\binom{np}{p}$ possibilités

— PUIS le choix d'une partition de $E \setminus F$, en $n-1$ parties à p éléments : $P_{n-1,p}$ possibilités.

Il y a bien, de cette façon, n décompte d'un même ensemble qui correspond au n sous ensembles possibles F que l'on peut choisir lors de la première étape.
Donc

$$\boxed{nP_{n,p} = \binom{np}{p} P_{n-1,p}}$$

Pour $n = 1$, on trouve $P_{1,p} = 1$ (un seul sous-ensemble qui contient tous les (p) éléments).
Puis (téléscopages multiplicatifs) :

$$\begin{aligned} P_{n,p} &= \frac{P_{n,p}}{P_{1,p}} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{P_{k+1,p}}{P_{k,p}} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \binom{(k+1)p}{p} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \binom{(k+1)p}{p} = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{[(k+1)p]!}{p![kp]!} = \frac{1}{n!} \frac{(np)!}{(p!)^{n-1} p!} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n, p \in \mathbb{N}^*,\ P_{n,p} = \frac{(np)!}{n!(p!)^n}.}$$

Exercice 5

1. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^*$ et $S_{n,p}$ le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

   (a) Si $p < n$, il ne peut pas y avoir de surjections de E_p sur E_n. C'est un résultat du cours.

   $$\boxed{\text{Si } p < n, \text{ alors } S_{p,n} = 0.}$$

   (b) Si l'ensemble de départ possède un élément de plus que celui d'arrivée, une surjection est parfaitement définie par :

   — le choix de l'éléments de E_n (arrivé) qui a deux antécédents : n possibilités.

   — PUIS le choix des deux antécédents de cet éléments pris dans E_{n+1} : $\binom{n+1}{2}$ possibilités.

   — PUIS le choix de la bijection de E_{n+1} privé des deux éléments précédents, dans E_n privé de l'élément à deux antécédents : $(n-1)!$ possibilités.

   $$\boxed{S_{n+1,n} = \binom{n}{2} n \times (n-1)! = \frac{n(n-1)n!}{2}}$$

   Si l'ensemble d'arrivée E_2 possède deux éléments.
   Une surjection est donc un fonction qui sépare l'ensemble de départ en deux parties disjointes : les antécédents du premier élément de E_2 et ceux du second.
   Or il y a 2^p partition de l'ensemble E_p de départ.
   Parmi celles-ci deux ne sont pas acceptable : $(E_p, \emptyset)$ et $(\emptyset, E_p)$.

   $$\boxed{S_{p,2} = 2^p - 2}$$

   (c) Toutes les applications de E_p dans E_n sont paramétrable par l'ensemble $f(E_p)$. Notons $i = \text{card}(f(E_p))$. On a alors $i \in [\![1, \min(n, p)]\!]$.
   Puis pour $i = \text{card}(f(E_p))$ fixé, une application de E_p dans E_n est parfaitement définie par :

   — le choix de l'ensemble $f(E_p)$: $\binom{n}{i}$ possibilités

   — le choix de la surjection de E_p sur $f(E_p)$ (de cardinal i) : $S_{p,i}$ possibilités.

   Mais par ailleurs, on a vu en cours que le nombre d'applications de E_p sur E_n est n^p.
   D'où l'égalité :

   $$\boxed{\forall\ n, p \in \mathbb{N}^*, \qquad n^p = \sum_{i=1}^{\min(n,p)} \binom{n}{i} S_{p,i} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_{p,i}}$$

   On peut écrire la somme jusqu'à n, car si $p \leqslant n$, alors $S_{p,i} = 0$ pour $i \in [\![p+1, n]\!]$.

2. On note d_n, le nombre de permutations σ de $\mathbb{N}_n$ n'admettant aucun point fixe (on dit que σ est un dérangement de $\mathbb{N}_n$). Par convention $d_0 = 1$.

   (a) Il n'y a qu'une permutation de $\mathbb{N}_1$, elle a un point fixe donc $d_1 = 0$.
   $\mathbb{N}_2$ admet deux permutations : $\{\mathrm{id}, (1 \leftrightarrow 2)\}$. Seule la seconde de ces permutations n'a pas de points fixes, donc $d_2 = 1$.

   $$\boxed{d_1 = 0 \qquad d_2 = 1}$$

   (b) Toutes les permutations σ de $\mathbb{N}_n$ sont paramétrable par l'ensemble $\mathrm{fix}(\sigma) = \{x \in \mathbb{N}_n \mid \sigma(x) = x\}$. Notons $k = \mathrm{fix}(\sigma)$. On a alors $ikin[\![0, n]\!]$.
   Puis pour $k = \mathrm{fix}(\sigma)$ fixé, une permutation de $\mathbb{N}_n$ est parfaitement définie par :
   — le choix de l'ensemble $\mathrm{fix}(\sigma)$: $\binom{n}{k}$ possibilités
   — le choix des dérangements de $\mathbb{N}_n \setminus \mathrm{fix}(\sigma)$: d_{n-k} possibilités.
   Mais par ailleurs, on a vu en cours que le nombre de permutations de $\mathbb{N}_n$ est $n!$.
   D'où l'égalité :

   $$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i}$$

   (en posant : $i = n - k$)

3. On a vu en cours (chap 2 - Inversion de Pascal) :

$$\boxed{\text{Si pour tout } h \in \mathbb{N},\ b_h = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} a_i, \text{ alors pour tout } k \in \mathbb{N},\ a_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b_j.}$$

On l'avait démontré par calcul direct (en exploitant la formule du binôme).
En notant que $S_{p,0} = 0$: aucune surjection vers l'ensemble vide, on a :
— Dans le premier cas : $h = n$, $a_i = S_{p,i}$ et $b_h = n^p$, donc

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad S_{p,k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^p}$$

— Dans le second cas : $h = n$, $a_i = d_i$ et $b_h = n!$, donc

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad d_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j! = k! \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s}{s!}}$$

en posant $s = k - j$.

Il nous reste à démontrer la formule d'inversion de Pascal. J'aime bien les deux démonstrations suivantes.
• Par les séries génératrices (plutôt programme de seconde année).
On note $B(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} x^k$ et $A(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$, les séries génératrices exponentielles associées à ces deux suites.
On reconnait le produit de Cauchy :

$$B(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i \right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-i)!} \times \frac{a_i}{i!} \right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k = \exp(x) \times A(x)$$

Cela s'inverse :

$$A(x) = \frac{1}{\exp(x)} B(x) = \exp(-x) \times B(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} \frac{b_i}{i!} \right) x^k$$

On peut identifier :

$$a_k = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i} b_i}{(k-i)! i!} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} b_i$$

• Par l'inversion de matrices.
On fixe $n \in \mathbb{N}$. Les matrices suivantes sont de taille $n+1$ (colonnes ou carrées).
On note B, la matrice colonne dont le coefficient en ligne i est $b_{i-1}(=^i [B])$ et de même A, la matrice colonne dont le coefficient en ligne i est $a_{i-1}(=^i [A])$.
On a alors $b_{h-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{h-1} \binom{h-1}{i} a_i$, cela se code matriciellement $B = M \times A$ avec

$$b_{h-1} =^h [B] = \sum_{j=1}^{n+1} {}^h[M]_j {}^j[A] = \sum_{i=0}^{h-1} \binom{h-1}{i} a_i$$

(avec $j = i+1$) à condition que

$$\forall\ h, i \in \mathbb{N}_n,\ {}^h[M]_j = \left\{ \begin{array}{cc} \dbinom{h-1}{j-1} & \text{si } j \leqslant h \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \Longrightarrow M = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{bmatrix}$$

M est la matrice du triangle de Pascal. On a alors $A = M^{-1}B$. Comment trouver M^{-1} ?
Une manière très simple est de considérer $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ tel que $\Phi(P) = P(X+1)$.
Alors Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont l'isomorphisme réciproque est $\Phi^{-1} : P \mapsto P(X-1)$.
En effet : pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(\Phi^{-1} \circ \Phi)(P) = P((X+1)-1) = P = (\Phi \circ \Phi^{-1})(P)$.
Puis, le miracle : si l'on considère la base $\mathcal{B} = (X^n, X^{n-1}, \ldots, X, 1)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on trouve :

$$\Phi(X^k) = (X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i \Longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = M$$

Donc

$$M^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi^{-1}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (-1)^n \binom{n}{0} & \cdots & -\binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{bmatrix}$$

car $\Phi^{-1}(X^k) = (X-1)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} X^i$.
Et on trouve alors

$$a_k = {}^{k+1}[A] = \sum_{i=1}^{n+1} {}^{k+1}[M^{-1}]_i {}^i[B] = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} (-1)^{k-(i-1)} b_{i-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} b_j$$